

Engendrement de plans discrets avec l'algorithme de Jacobi-Perron

Valérie Berthé, Jérémie Bourdon, Timo Jolivet et Anne Siegel

**Groupe de travail de l'ANR Kidico
30 juin 2011, Paris**

Plans discrets

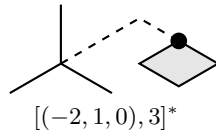
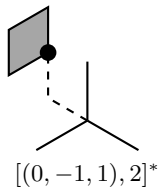
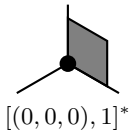
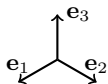
Plans discrets, définition arithmétique

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_{>0}^3$. On définit le **plan discret**

$$\Gamma_{\mathbf{v}} = \{[\mathbf{x}, i]^* : 0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle\}$$

composé de **faces unité** $[\mathbf{x}, i]^*$, chacune définie par :

- une **position** $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$;
- un **type** $i \in \{1, 2, 3\}$.



Substitutions duales [Arnoux-Ito '01]

Pour $\sigma : \{1, 2, 3\}^* \rightarrow \{1, 2, 3\}^*$ vérifiant $\det(\mathbf{M}_\sigma) = \pm 1$, soit

$$\mathbf{E}_1^*(\sigma)([\mathbf{x}, i]^*) = \mathbf{M}_\sigma^{-1} \mathbf{x} + \bigcup_{k=1,2,3} \bigcup_{s \mid \sigma(k)=pis} [\ell(s), k]^*,$$

où :

- $\mathbf{M}_\sigma$ = matrice d'incidence de σ ;
- $\ell : \{1, 2, 3\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_+^3$, $w \mapsto (|w|_1, |w|_2, |w|_3)$.

Substitutions duales [Arnoux-Ito '01]

Pour $\sigma : \{1, 2, 3\}^* \rightarrow \{1, 2, 3\}^*$ vérifiant $\det(\mathbf{M}_\sigma) = \pm 1$, soit

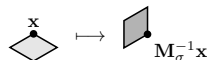
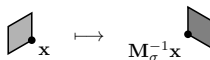
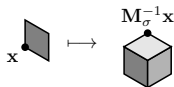
$$\mathbf{E}_1^*(\sigma)([\mathbf{x}, i]^*) = \mathbf{M}_\sigma^{-1} \mathbf{x} + \bigcup_{k=1,2,3} \bigcup_{s \mid \sigma(k)=i} [\ell(s), k]^*,$$

où :

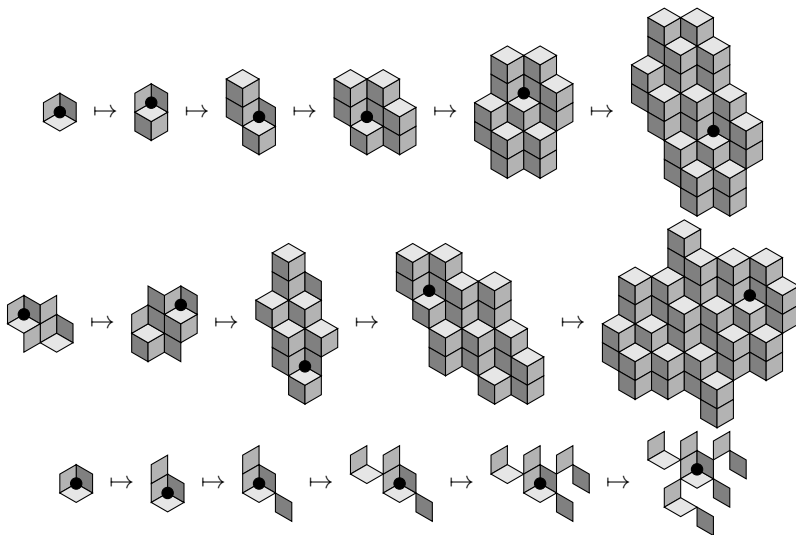
- $\mathbf{M}_\sigma$ = matrice d'incidence de σ ;
- $\ell : \{1, 2, 3\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_+^3$, $w \mapsto (|w|_1, |w|_2, |w|_3)$.

Exemple : $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^*(\sigma)([\mathbf{x}, 1]^*) &= \mathbf{M}_\sigma^{-1} \mathbf{x} + [(1, 0, -1), 1]^* \cup [(0, 1, -1), 2]^* \cup [(0, 0, 0), 3]^* \\ \mathbf{E}_1^*(\sigma)([\mathbf{x}, 2]^*) &= \mathbf{M}_\sigma^{-1} \mathbf{x} + [(0, 0, 0), 1]^* \\ \mathbf{E}_1^*(\sigma)([\mathbf{x}, 3]^*) &= \mathbf{M}_\sigma^{-1} \mathbf{x} + [(0, 0, 0), 2]^* \end{aligned}$$



Exemples



Propriétés : $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$ et plans discrets

Image d'un plan = un plan [Arnoux-Ito '01, Fernique '07]

Pour tout $n \geq 0$: $\mathbf{E}_1^*(\sigma)^n(\text{cube}) \subseteq \text{un plan discret.}$

Propriétés : $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$ et plans discrets

Image d'un plan = un plan [Arnoux-Ito '01, Fernique '07]

Pour tout $n \geq 0$: $\mathbf{E}_1^*(\sigma)^n(\text{cube}) \subseteq \text{un plan discret.}$

Encore mieux : $\mathbf{E}_1^*(\sigma)(\Gamma_{\mathbf{v}}) = \Gamma_{\mathbf{t}_{M_\sigma} \mathbf{v}}.$

Propriétés : $E_1^*(\sigma)$ et plans discrets

Image d'un plan = un plan [Arnoux-Ito '01, Fernique '07]

Pour tout $n \geq 0$: $E_1^*(\sigma)^n(\text{plan}) \subseteq \text{un plan discret}$.

Encore mieux : $E_1^*(\sigma)(\Gamma_v) = \Gamma_{t_{M_\sigma} v}$.

Remarque : on a toujours $\text{plan} \subseteq \Gamma_v$.

Propriétés : $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$ et plans discrets

Image d'un plan = un plan [Arnoux-Ito '01, Fernique '07]

Pour tout $n \geq 0$: $\mathbf{E}_1^*(\sigma)^n(\text{cube}) \subseteq \text{un plan discret.}$

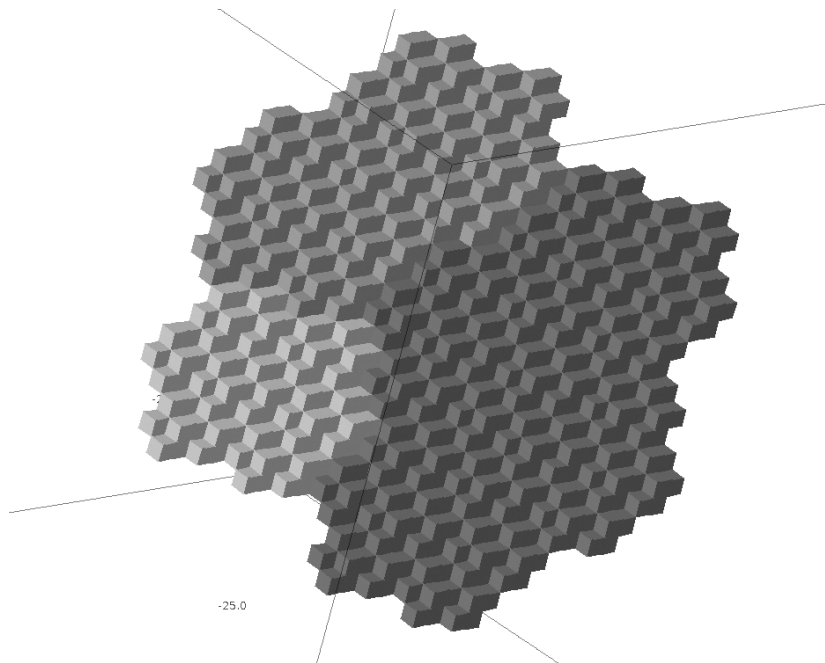
Encore mieux : $\mathbf{E}_1^*(\sigma)(\Gamma_{\mathbf{v}}) = \Gamma_{\mathbf{t}_{M_\sigma \mathbf{v}}}$.

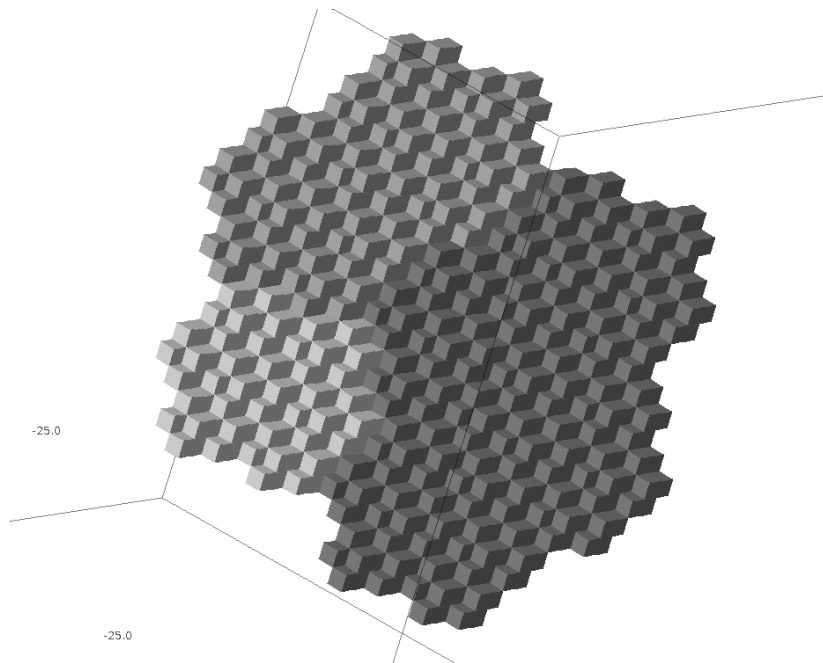
Remarque : on a toujours $\text{cube} \subseteq \Gamma_{\mathbf{v}}$.

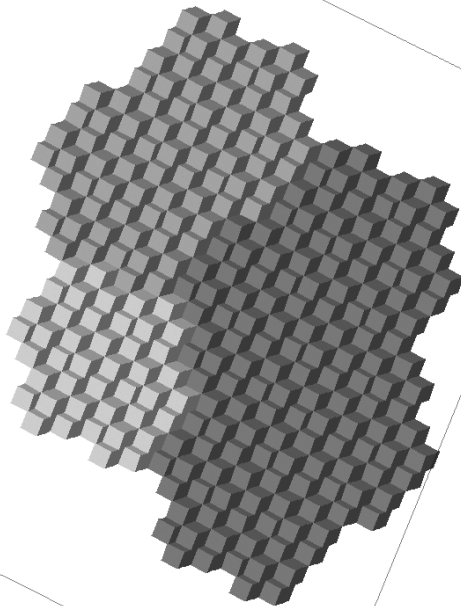
Images disjointes [Arnoux-Ito '01]

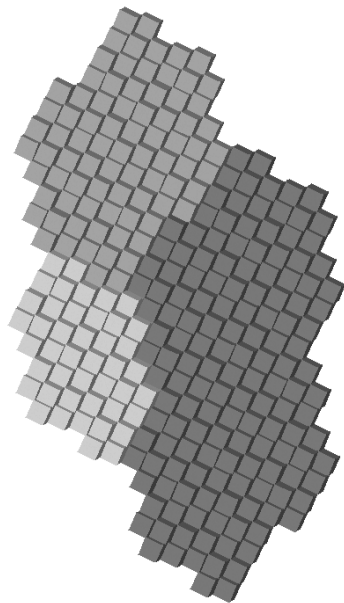
$[\mathbf{x}, i]^* \neq [\mathbf{y}, j]^* \in \text{plan discret}$

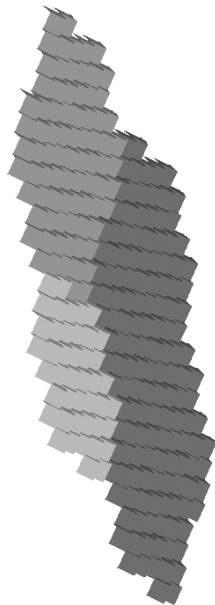
$$\implies \mathbf{E}_1^*(\sigma)([\mathbf{x}, i]^*) \cap \mathbf{E}_1^*(\sigma)([\mathbf{y}, j]^*) = \emptyset$$

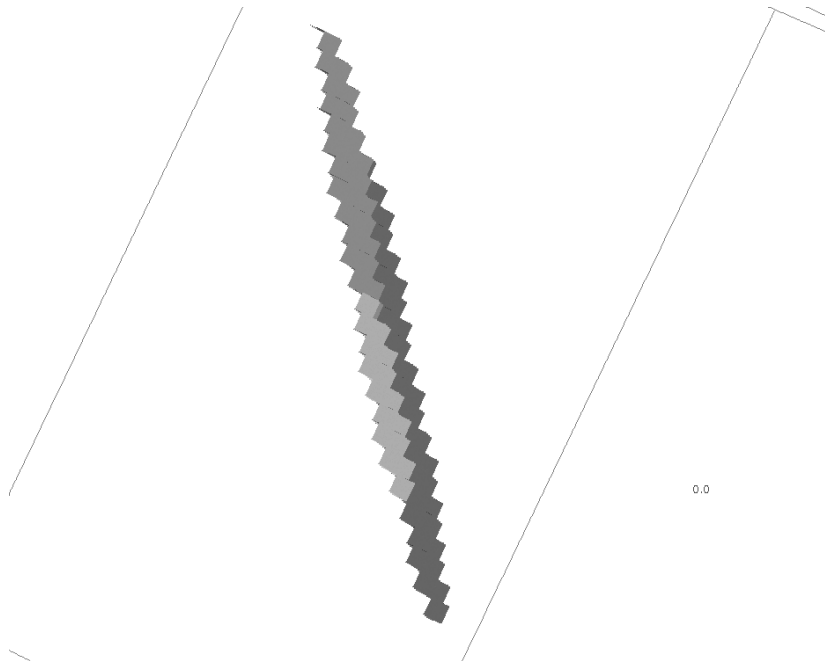




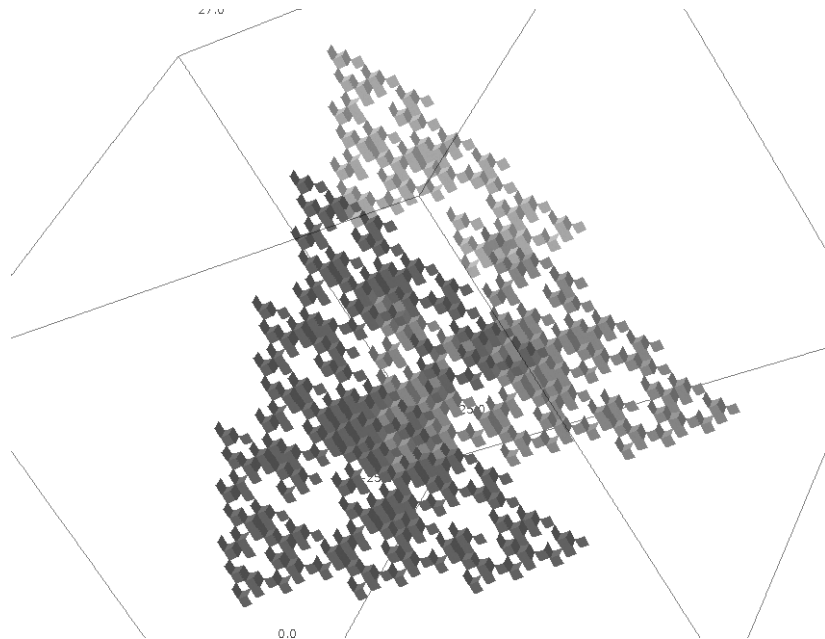


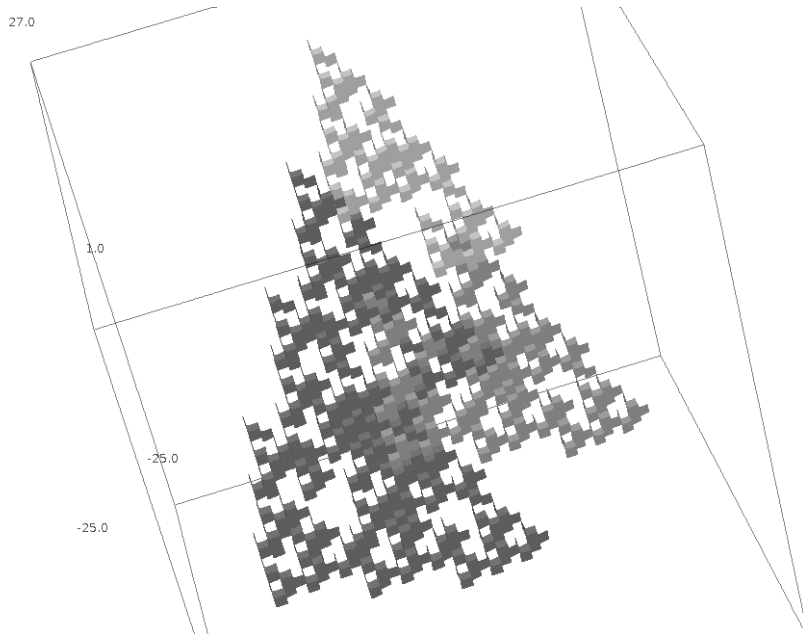


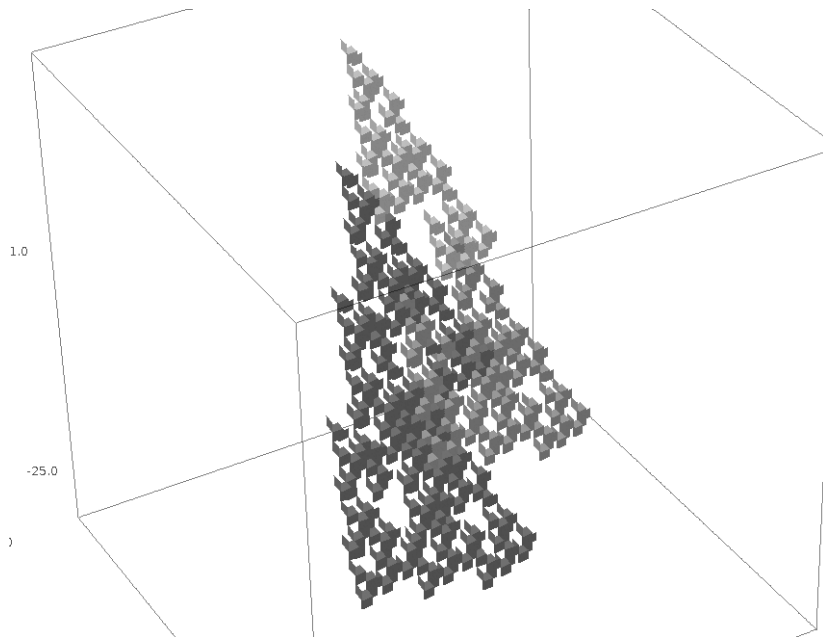


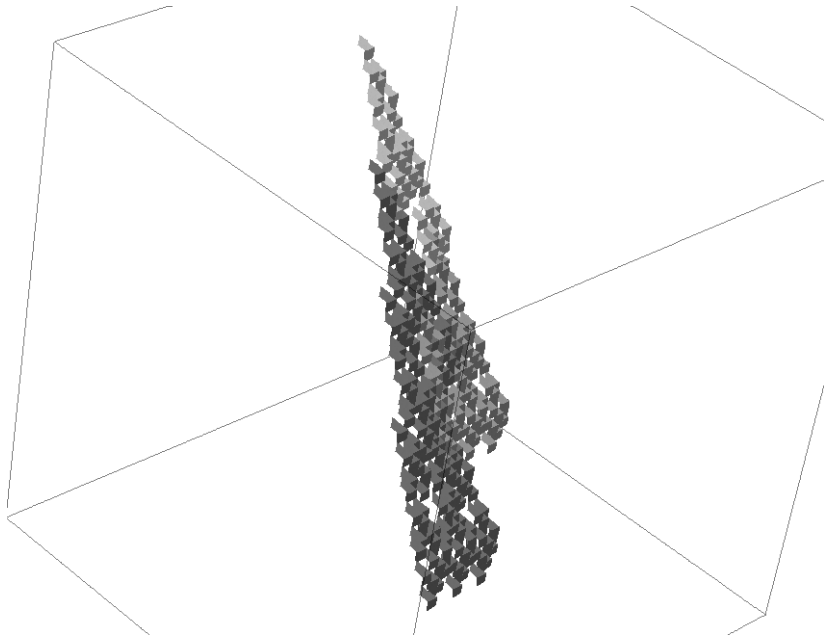


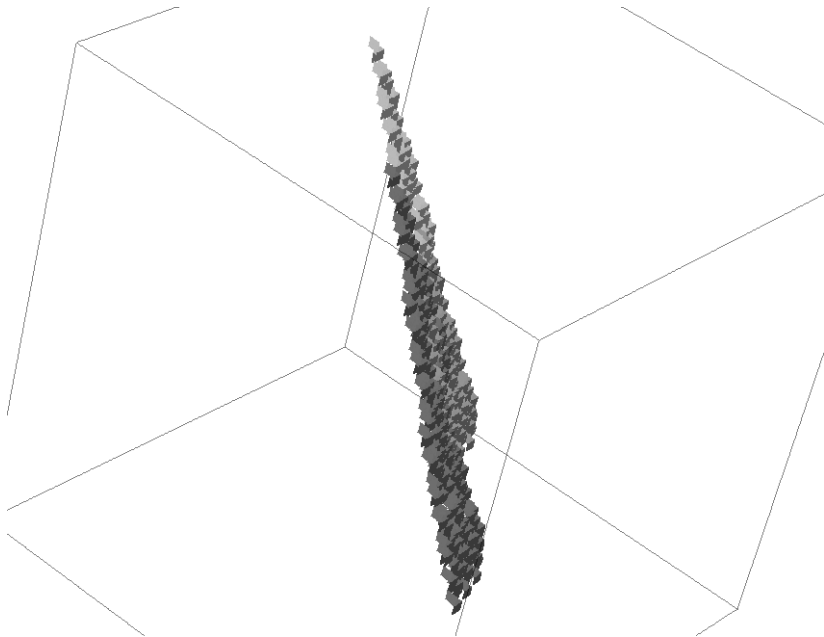
0.0

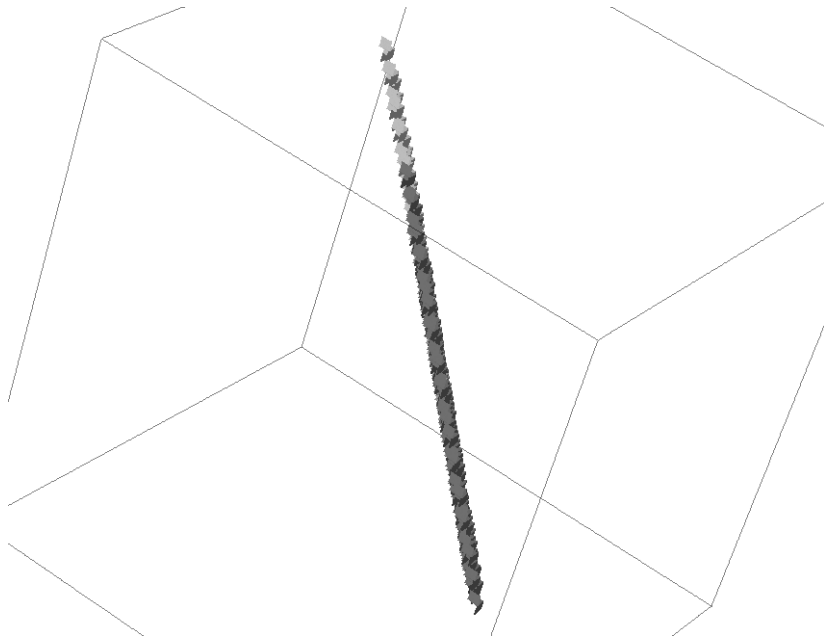












Maintenant...

Étant donné un plan Γ_v , on veut trouver une suite $(E_1^*(\sigma_n))_{n \geq 0}$ qui engendre des **boules croissantes centrées en 0** incluses dans Γ_v .

On va construire notre suite $(E_1^*(\sigma_n))_{n \geq 0}$ en décomposant v en **fraction continue multidimensionnelle** (Jacobi-Perron).

Algorithme de Jacobi-Perron

Soit $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ totalement irrationnel tel que $0 < a, b \leq c$.

Algorithme de JP

$$\mathbf{v} = (\textcolor{red}{a}, b, c) \xrightarrow{\text{JP}} \mathbf{v}_1 = (b - \lfloor b/a \rfloor \textcolor{red}{a}, c - \lfloor c/a \rfloor \textcolor{red}{a}, \textcolor{red}{a})$$

Matriciellement : $\mathbf{v} = \mathbf{M}_{B,C} \mathbf{v}_1$, avec

$$\mathbf{M}_{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & B \\ 0 & 1 & C \end{pmatrix} \quad B = \lfloor b/a \rfloor \quad C = \lfloor c/a \rfloor$$

Développement JP de $\mathbf{v}$

Itération de l'algorithme : suite $(B_n, C_n)_{n \geq 1}$ de couples d'entiers tels que
 $\mathbf{v} = \mathbf{M}_{B_1, C_1} \cdots \mathbf{M}_{B_n, C_n} \mathbf{v}_n$.

Exemple

$$\mathbf{v} = (\textcolor{red}{1}, \sqrt{2}, \sqrt{\pi})$$

Exemple

$$\mathbf{v} = (\textcolor{red}{1}, \sqrt{2}, \sqrt{\pi})$$

$$B_1 = \lfloor \sqrt{2}/1 \rfloor = \textcolor{blue}{1}$$

$$C_1 = \lfloor \sqrt{\pi}/1 \rfloor = \textcolor{blue}{1}$$

Exemple

$$\mathbf{v} = (\textcolor{red}{1}, \sqrt{2}, \sqrt{\pi}) \mapsto (\sqrt{2} - \textcolor{blue}{1} \cdot \textcolor{red}{1}, \sqrt{\pi} - \textcolor{blue}{1} \cdot \textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{1})$$

$$B_1 = \lfloor \sqrt{2}/1 \rfloor = \textcolor{blue}{1}$$

$$C_1 = \lfloor \sqrt{\pi}/1 \rfloor = \textcolor{blue}{1}$$

Exemple

$$\mathbf{v} = (\textcolor{red}{1}, \sqrt{2}, \sqrt{\pi}) \mapsto (\sqrt{2} - \textcolor{blue}{1} \cdot \textcolor{red}{1}, \sqrt{\pi} - \textcolor{blue}{1} \cdot \textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{1})$$

$$B_1 = \lfloor \sqrt{2}/1 \rfloor = \textcolor{blue}{1}$$

$$B_2 = \lfloor (\sqrt{\pi} - 1)/(\sqrt{2} - 1) \rfloor = \textcolor{blue}{1}$$

$$C_1 = \lfloor \sqrt{\pi}/1 \rfloor = \textcolor{blue}{1}$$

$$C_2 = \lfloor 1/(\sqrt{2} - 1) \rfloor = \textcolor{blue}{2}$$

Exemple

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{\pi}) &\mapsto (\sqrt{2} - 1 \cdot 1, \sqrt{\pi} - 1 \cdot 1, 1) \\
 &\mapsto (\sqrt{\pi} - 1 - 1 \cdot (\sqrt{2} - 1), 1 - 2 \cdot (\sqrt{2} - 1), \sqrt{2} - 1) \\
 &= (\sqrt{\pi} - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)
 \end{aligned}$$

$$B_1 = \lfloor \sqrt{2}/1 \rfloor = 1$$

$$B_2 = \lfloor (\sqrt{\pi} - 1)/(\sqrt{2} - 1) \rfloor = 1$$

$$C_1 = \lfloor \sqrt{\pi}/1 \rfloor = 1$$

$$C_2 = \lfloor 1/(\sqrt{2} - 1) \rfloor = 2$$

Exemple

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{\pi}) &\mapsto (\sqrt{2} - 1 \cdot 1, \sqrt{\pi} - 1 \cdot 1, 1) \\
 &\mapsto (\sqrt{\pi} - 1 - 1 \cdot (\sqrt{2} - 1), 1 - 2 \cdot (\sqrt{2} - 1), \sqrt{2} - 1) \\
 &\quad = (\sqrt{\pi} - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1) \\
 &\mapsto \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \lfloor \sqrt{2}/1 \rfloor = 1 & C_1 &= \lfloor \sqrt{\pi}/1 \rfloor = 1 \\
 B_2 &= \lfloor (\sqrt{\pi} - 1)/(\sqrt{2} - 1) \rfloor = 1 & C_2 &= \lfloor 1/(\sqrt{2} - 1) \rfloor = 2 \\
 B_3 &= \lfloor (3 - 2\sqrt{2})/(\sqrt{\pi} - \sqrt{2}) \rfloor = 1 & C_3 &= \lfloor (\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{\pi} - \sqrt{2}) \rfloor = 1
 \end{aligned}$$

Développement : $(1, 1), (1, 2), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 3), (2, 4), (0, 1), (0, 7),$
 $(0, 1), (29, 36), (5, 5), (4, 19), (1, 1), (2, 3), (0, 2), (6, 8), (0, 1), (0, 1), (1, 1), \dots$

Substitutions de JP

Soit $\sigma_{B,C} : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 13^B, 3 \mapsto 23^C$.

- ➡ Choix judicieux : matrice d'incidence de $\sigma_{B,C} = {}^t\mathbf{M}_{B,C}$
- ➡ Donc : $\mathbf{E}_1^*(\sigma_{B,C})(\Gamma_{\mathbf{v}}) = \Gamma_{\mathbf{M}_{B,C}\mathbf{v}}$
- ➡ Permet d'**approximer** $\Gamma_{\mathbf{v}}$ à partir de  :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{cube} & \subseteq & \Gamma_{\mathbf{v}} \\
 \mathbf{E}_1^*(\sigma_{B_1,C_1})(\text{cube}) & \subseteq & \Gamma_{\mathbf{M}_{B_1,C_1}\mathbf{v}_1} = \Gamma_{\mathbf{v}} \\
 \dots & &
 \end{array}$$

$$\mathbf{E}_1^*(\sigma_{B_1,C_1}) \cdots \mathbf{E}_1^*(\sigma_{B_n,C_n})(\text{cube}) \subseteq \Gamma_{\mathbf{M}_{B_1,C_1} \cdots \mathbf{M}_{B_n,C_n} \mathbf{v}_n} = \Gamma_{\mathbf{v}}$$

Substitutions de JP

Soit $\sigma_{B,C} : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 13^B, 3 \mapsto 23^C$.

- ➡ Choix judicieux : matrice d'incidence de $\sigma_{B,C} = {}^t\mathbf{M}_{B,C}$
- ➡ Donc : $\mathbf{E}_1^*(\sigma_{B,C})(\Gamma_{\mathbf{v}}) = \Gamma_{\mathbf{M}_{B,C}\mathbf{v}}$
- ➡ Permet d'**approximer** $\Gamma_{\mathbf{v}}$ à partir de  :

$$\begin{aligned}
 & \quad \quad \quad \text{cube} \quad \subseteq \quad \Gamma_{\mathbf{v}} \\
 \mathbf{E}_1^*(\sigma_{B_1,C_1})(\text{cube}) & \subseteq \Gamma_{\mathbf{M}_{B_1,C_1}\mathbf{v}_1} = \Gamma_{\mathbf{v}} \\
 & \quad \quad \quad \dots \\
 \mathbf{E}_1^*(\sigma_{B_1,C_1}) \cdots \mathbf{E}_1^*(\sigma_{B_n,C_n})(\text{cube}) & \subseteq \Gamma_{\mathbf{M}_{B_1,C_1} \cdots \mathbf{M}_{B_n,C_n}\mathbf{v}_n} = \Gamma_{\mathbf{v}}
 \end{aligned}$$

Théorème [Ito-Ohtsuki '94, Berthé-Bourdon-J-Siegel '11]

La suite de motifs $(\mathbf{E}_1^*(\sigma_{B_1,C_1}) \cdots \mathbf{E}_1^*(\sigma_{B_n,C_n})(\mathcal{V}))_{n \geq 0}$ recouvre des boules centrées en $\mathbf{0}$ **arbitrairement grandes**.

- $\mathcal{V} = \text{cube}$ (avec une ou deux faces en plus, selon $(B_n, C_n)_{n \geq 1}$)
- les motifs générés sont simplement connexes

Idée de la preuve du théorème [Ito-Ohtsuki 94]

Preuve par récurrence

1. L'image d'un anneau est un anneau (propriété de l'anneau).
2. On obtient un anneau qui entoure $\mathcal{V}$ en partant de $\mathcal{V}$ (initialisation).

Idée de la preuve du théorème [Ito-Ohtsuki 94]

Preuve par récurrence

1. L'image d'un anneau est un anneau (propriété de l'anneau).
2. On obtient un anneau qui entoure $\mathcal{V}$ en partant de $\mathcal{V}$ (initialisation).

Problèmes :

- La propriété de l'anneau est fausse (énoncée et non prouvée dans [IO94]).
- Dans [IO94], (1) nécessite une propriété de couverture qui est incomplète.
- L'étude de l'initialisation est peu détaillée (graphe de génération).

Idée de la preuve du théorème [Ito-Ohtsuki 94]

Preuve par récurrence

1. L'image d'un anneau est un anneau (propriété de l'anneau).
2. On obtient un anneau qui entoure $\mathcal{V}$ en partant de $\mathcal{V}$ (initialisation).

Problèmes :

- La propriété de l'anneau est fausse (énoncée et non prouvée dans [IO94]).
- Dans [IO94], (1) nécessite une propriété de couverture qui est incomplète.
- L'étude de l'initialisation est peu détaillée (graphe de génération).

On peut résoudre ces problèmes :

- Propriétés de couverture plus fortes (et une analyse de cas) pour (1).
- Construction algorithmique du graphe de génération pour (2).

Première définition d'un anneau

Un **anneau** A de P est un motif :

- arête-connexe
- qui "entoure" P , i.e., $P \cap \overline{\Gamma \setminus (P \cup A)} = \emptyset$ (P ne touche pas l'extérieur)
- (tel qu'il n'y a ni trou ni chevauchement avec P)

Première définition d'un anneau

Un **anneau** A de P est un motif :

- arête-connexe
- qui “entoure” P , i.e., $P \cap \overline{\Gamma \setminus (P \cup A)} = \emptyset$ (P ne touche pas l'extérieur)
- (tel qu'il n'y a ni trou ni chevauchement avec P)

➡ On veut “propager” les anneaux dans les images pour avoir des boules croissantes.

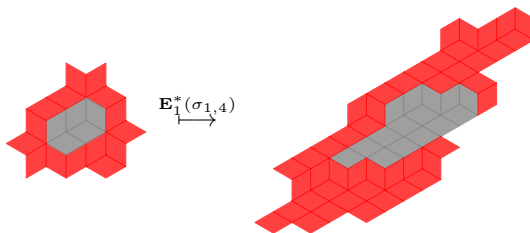
Première définition d'un anneau

Un **anneau** A de P est un motif :

- arête-connexe
- qui "entoure" P , i.e., $P \cap \overline{\Gamma \setminus (P \cup A)} = \emptyset$ (P ne touche pas l'extérieur)
- (tel qu'il n'y a ni trou ni chevauchement avec P)

➡ On veut "propager" les anneaux dans les images pour avoir des boules croissantes.

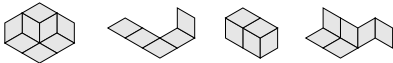
À éviter :

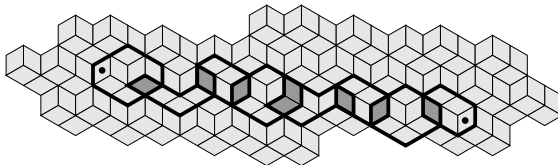


Première étape [IO94] : propriété de couverture

Définition : $\mathcal{L}$ -couverture

Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de motifs arête-connexes. Un motif P est $\mathcal{L}$ -**couvert** si $\forall f, g \in P$, il existe un $\mathcal{L}$ -**chemin** de f à g .

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Motif 1} \quad \text{Motif 2} \quad \text{Motif 3} \quad \text{Motif 4} \end{array} \right\}$$


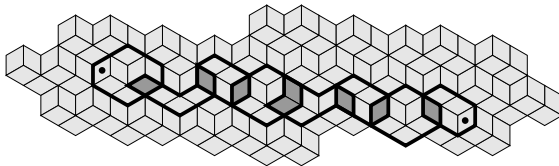


Première étape [IO94] : propriété de couverture

Définition : $\mathcal{L}$ -couverture

Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de motifs arête-connexes. Un motif P est $\mathcal{L}$ -**couvert** si $\forall f, g \in P$, il existe un $\mathcal{L}$ -**chemin** de f à g .

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Motif 1} \quad \text{Motif 2} \quad \text{Motif 3} \quad \text{Motif 4} \end{array} \right\}$$



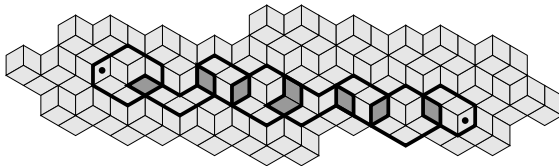
➡ Bonnes propriétés topologiques (arête-connexité).

Première étape [IO94] : propriété de couverture

Définition : $\mathcal{L}$ -couverture

Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de motifs arête-connexes. Un motif P est $\mathcal{L}$ -**couvert** si $\forall f, g \in P$, il existe un $\mathcal{L}$ -**chemin** de f à g .

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Motif 1} \quad \text{Motif 2} \quad \text{Motif 3} \quad \text{Motif 4} \end{array} \right\}$$



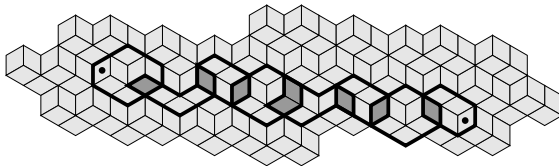
- Bonnes propriétés topologiques (arête-connexité).
- Dans [IO94], l'erreur est de croire que la $\mathcal{L}$ -couverture est suffisante pour avoir la propriété de l'anneau (cf. plus tard).

Première étape [IO94] : propriété de couverture

Définition : $\mathcal{L}$ -couverture

Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de motifs arête-connexes. Un motif P est $\mathcal{L}$ -**couvert** si $\forall f, g \in P$, il existe un $\mathcal{L}$ -**chemin** de f à g .

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Motif 1} \quad \text{Motif 2} \quad \text{Motif 3} \quad \text{Motif 4} \end{array} \right\}$$



- Bonnes propriétés topologiques (arête-connexité).
- Dans [IO94], l'erreur est de croire que la $\mathcal{L}$ -couverture est suffisante pour avoir la propriété de l'anneau (cf. plus tard).
- Cependant, on ne peut rien faire sans cette propriété : on commence par chercher un $\mathcal{L}_{JP}$ tel que la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture soit préservée par les $\mathbf{E}_1^*(\sigma_{B,C})$.

Substitutions JP, détails

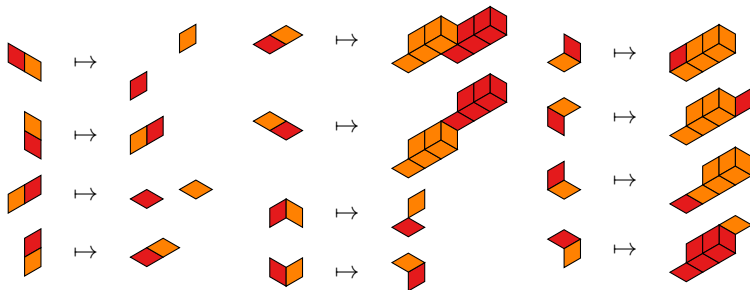
Soit $\Sigma_{B,C} = \mathbf{E}_1^*(\sigma_{B,C})$:

$$\Sigma_{B,C} : \left\{ \begin{array}{ll} [\mathbf{0}, 1]^* & \mapsto [(B, 0, 0), 2]^* \\ [\mathbf{0}, 2]^* & \mapsto [(C, 0, 0), 3]^* \\ [\mathbf{0}, 3]^* & \mapsto [\mathbf{0}, 1]^* \cup \bigcup_{k=0}^{B-1} [(k, 0, 0), 2]^* \cup \bigcup_{\ell=0}^{C-1} [(\ell, 0, 0), 3]^* \end{array} \right. .$$

$$\Sigma_{B,C} : \left\{ \begin{array}{ll} \text{[diagram]} & \mapsto \text{[diagram]} \\ \text{[diagram]} & \mapsto \text{[diagram]} \\ \text{[diagram]} & \mapsto \text{[diagram]} \end{array} \right. \quad (\text{ce dessin : } B = 3, C = 5)$$

Comment trouver un tel $\mathcal{L}_{JP}$?

Première approche : essayer de partir des motifs arête-connexes à deux faces.



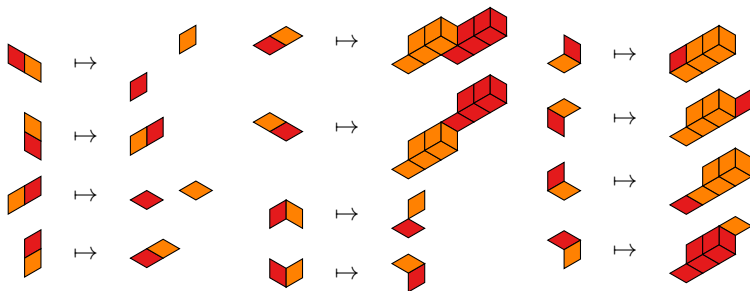
On veut : un jeu de motifs $\mathcal{L}$ stable (dont les images sont $\mathcal{L}$ -couvertes), et qui recouvre $\mathcal{V}$, car :

Propriété

$\mathcal{L}$ stable par Σ et P $\mathcal{L}$ -couvert $\implies \Sigma(P)$ $\mathcal{L}$ -couvert

Comment trouver un tel $\mathcal{L}_{JP}$?

Première approche : essayer de partir des motifs arête-connexes à deux faces.



On veut : un jeu de motifs $\mathcal{L}$ stable (dont les images sont $\mathcal{L}$ -couvertes), et qui recouvre $\mathcal{V}$, car :

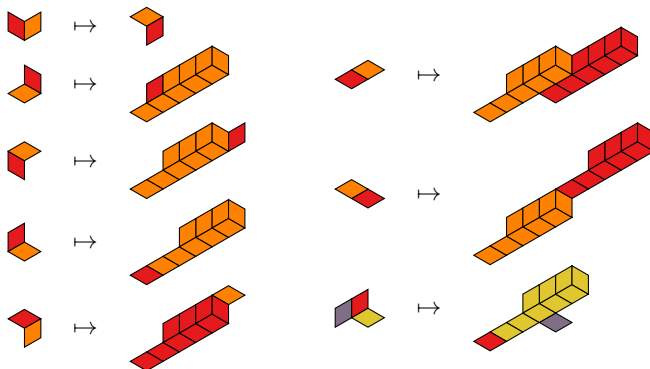
Propriété

$\mathcal{L}$ stable par Σ et P $\mathcal{L}$ -couvert $\implies \Sigma(P)$ $\mathcal{L}$ -couvert

Ici : jeu de motifs pas stable.

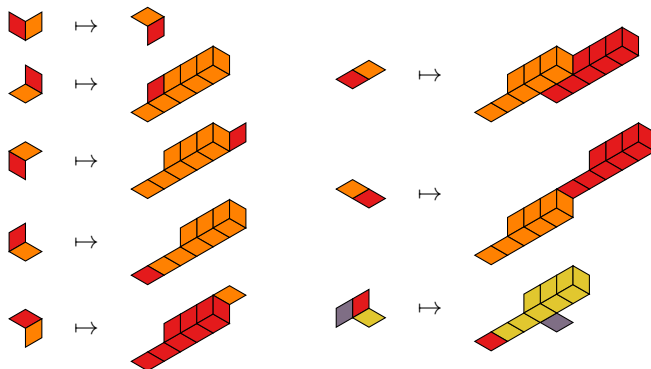
En tâtonnant...

...on trouve $\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \begin{array}{c} \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \end{array} \right\} :$



En tâtonnant...

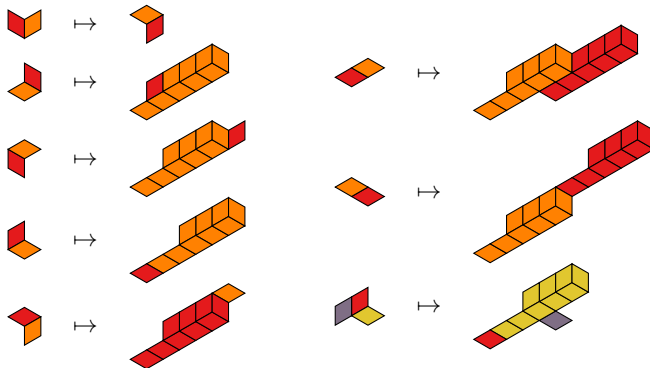
...on trouve $\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \begin{array}{c} \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \\ \text{cube} \end{array} \right\} :$



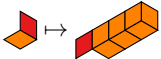
➡ Stable par $\Sigma_{B,C}$ et recouvre $\mathcal{V}$.

En tâtonnant...

...on trouve $\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \begin{array}{c} \text{[8 cubes gris]} \end{array} \right\} :$



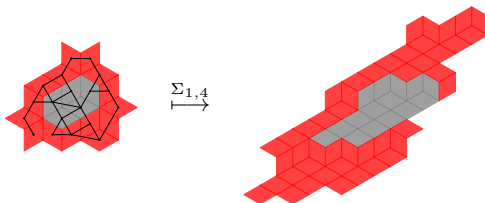
➡ Stable par $\Sigma_{B,C}$ et recouvre $\mathcal{V}$.

➡ (Dernier motif nécessaire, sinon pas stable si $B = C$: )

➡ **Propriété :** $\Sigma_{B_1,C_1} \cdots \Sigma_{B_n,C_n}(\mathcal{V})$ est $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert pour tout n .

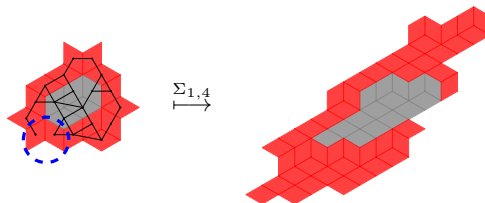
Cependant...

... l'image d'un anneau $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert est bien $\mathcal{L}_{JP}$ -couverte, **mais ce n'est pas forcément un anneau** :



Cependant...

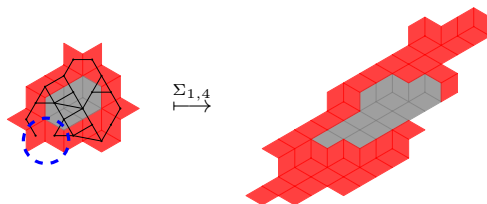
... l'image d'un anneau $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert est bien $\mathcal{L}_{JP}$ -couverte, **mais ce n'est pas forcément un anneau** :



Mais : on “voit” un problème : l’anneau “n’entoure pas vraiment”.

Cependant...

... l'image d'un anneau $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert est bien $\mathcal{L}_{JP}$ -couverte, **mais ce n'est pas forcément un anneau** :

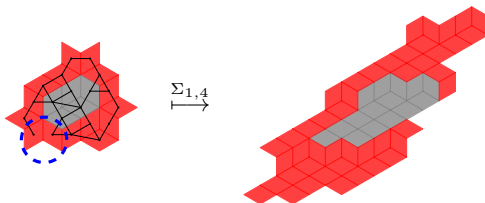


Mais : on “voit” un problème : l’anneau “n’entoure pas vraiment”.

➡ Plusieurs approches envisageables pour “capturer” cette notion (difficile).

Cependant...

... l'image d'un anneau $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert est bien $\mathcal{L}_{JP}$ -couverte, **mais ce n'est pas forcément un anneau** :

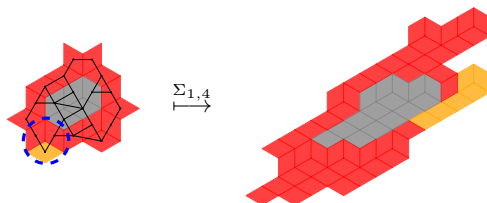


Mais : on “voit” un problème : l'anneau “n'entoure pas vraiment”.

- ➡ Plusieurs approches envisageables pour “capturer” cette notion (difficile).
- ➡ Ici : on **reforce** la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture : on veut que le motif incriminé  soit **obligatoirement “complété”** en .

Cependant...

... l'image d'un anneau $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert est bien $\mathcal{L}_{JP}$ -couverte, **mais ce n'est pas forcément un anneau** :

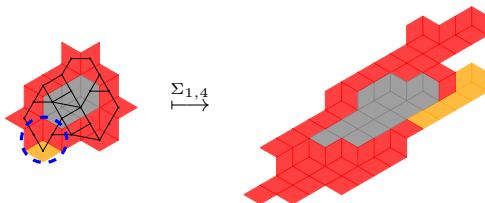


Mais : on “voit” un problème : l'anneau “n'entoure pas vraiment”.

- ➡ Plusieurs approches envisageables pour “capturer” cette notion (difficile).
- ➡ Ici : on **reforce** la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture : on veut que le motif incriminé  soit **obligatoirement “complété”** en .

Cependant...

... l'image d'un anneau $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert est bien $\mathcal{L}_{JP}$ -couverte, **mais ce n'est pas forcément un anneau** :



Mais : on “voit” un problème : l'anneau “n'entoure pas vraiment”.

- Plusieurs approches envisageables pour “capturer” cette notion (difficile).
- Ici : on **reforce** la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture : on veut que le motif incriminé  soit **obligatoirement “complété”** en .
- On introduit une notion de **$\mathcal{L}$ -couverture forte**.

$\mathcal{L}$ -couverture forte

Définition

P est **fortement $\mathcal{L}$ -couvert** si :

- P est $\mathcal{L}$ -couvert ;
- $\forall X$ arête-connexe à 2 faces tel que $X \subseteq P$,
 $\exists Y \in \mathcal{L}$ tel que $X \subseteq Y \subseteq P$ (complétion).

$\mathcal{L}$ -couverture forte

Définition

P est **fortement $\mathcal{L}$ -couvert** si :

- P est $\mathcal{L}$ -couvert ;
- $\forall X$ arête-connexe à 2 faces tel que $X \subseteq P$,
 $\exists Y \in \mathcal{L}$ tel que $X \subseteq Y \subseteq P$ (complétion).

En rajoutant deux motifs à

$$\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \begin{array}{c} \text{motif 1} \\ \text{motif 2} \\ \text{motif 3} \\ \text{motif 4} \\ \text{motif 5} \\ \text{motif 6} \\ \text{motif 7} \\ \text{motif 8} \\ \text{motif 9} \\ \text{motif 10} \end{array} \right\},$$

on obtient :

Proposition

P fortement $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert, ne contenant ni  ni  (condition JP)
 $\implies \Sigma_{B,C}(P)$ fortement $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert.

$\mathcal{L}$ -couverture forte

Définition

P est **fortement $\mathcal{L}$ -couvert** si :

- P est $\mathcal{L}$ -couvert ;
- $\forall X$ arête-connexe à 2 faces tel que $X \subseteq P$,
 $\exists Y \in \mathcal{L}$ tel que $X \subseteq Y \subseteq P$ (complétion).

En rajoutant deux motifs à

$$\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \begin{array}{c} \text{[diagram 1]} \\ \text{[diagram 2]} \\ \text{[diagram 3]} \\ \text{[diagram 4]} \\ \text{[diagram 5]} \\ \text{[diagram 6]} \\ \text{[diagram 7]} \\ \text{[diagram 8]} \\ \text{[diagram 9]} \\ \text{[diagram 10]} \end{array} \right\},$$

on obtient :

Proposition

P fortement $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert, ne contenant ni  ni  (condition JP)
 $\implies \Sigma_{B,C}(P)$ fortement $\mathcal{L}_{JP}$ -couvert.

➡ On a éliminé les “faux” anneaux, mais la propriété de l’anneau reste encore à prouver.

Preuve de la propriété de l'anneau

On veut prouver que les propriétés suivantes passent à l'image par $\Sigma_{B,C}$:

1. P , $A \cup P$ et $\Gamma \setminus (A \cup P)$ sont $\mathcal{L}$ -couverts ;
2. A est fortement $\mathcal{L}$ -couvert ;
3. A et P n'ont pas de face en commun ;
4. $P \cap \overline{\Gamma \setminus (P \cup A)} = \emptyset$.

Pour (1), (2), (3), déjà fait.

Preuve de la propriété de l'anneau

On veut prouver que les propriétés suivantes passent à l'image par $\Sigma_{B,C}$:

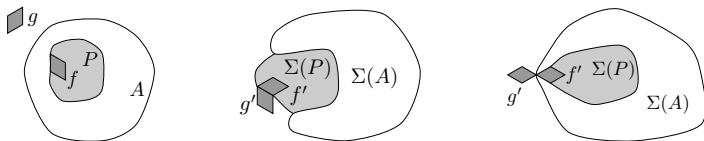
1. P , $A \cup P$ et $\Gamma \setminus (A \cup P)$ sont $\mathcal{L}$ -couverts ;
2. A est fortement $\mathcal{L}$ -couvert ;
3. A et P n'ont pas de face en commun ;
4. $P \cap \overline{\Gamma \setminus (P \cup A)} = \emptyset$.

Pour (1), (2), (3), déjà fait.

Si (4) n'est pas vrai pour $\Sigma(A)$ et $\Sigma(P)$, ça veut dire qu'il existe

$$f \in P, \quad g \in \Gamma \setminus (A \cup P), \quad f' \in \Sigma(f), \quad g' \in \Sigma(g)$$

tels que $f' \cup g' \neq \emptyset$:



Preuve de la propriété de l'anneau

On veut prouver que les propriétés suivantes passent à l'image par $\Sigma_{B,C}$:

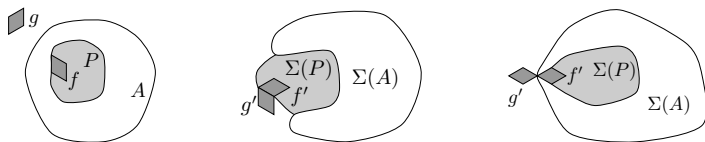
1. P , $A \cup P$ et $\Gamma \setminus (A \cup P)$ sont $\mathcal{L}$ -couverts ;
2. A est fortement $\mathcal{L}$ -couvert ;
3. A et P n'ont pas de face en commun ;
4. $P \cap \overline{\Gamma \setminus (P \cup A)} = \emptyset$.

Pour (1), (2), (3), déjà fait.

Si (4) n'est pas vrai pour $\Sigma(A)$ et $\Sigma(P)$, ça veut dire qu'il existe

$$f \in P, \quad g \in \Gamma \setminus (A \cup P), \quad f' \in \Sigma(f), \quad g' \in \Sigma(g)$$

tels que $f' \cup g' \neq \emptyset$:



➡ On énumère **tous les cas possibles** pour $f' \cup g'$ (36 motifs).

Preuve de la propriété de l'anneau

On veut prouver que les propriétés suivantes passent à l'image par $\Sigma_{B,C}$:

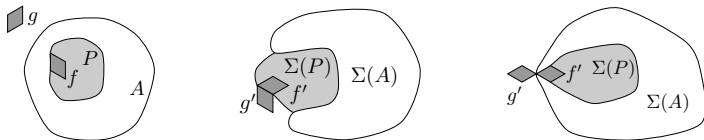
1. P , $A \cup P$ et $\Gamma \setminus (A \cup P)$ sont $\mathcal{L}$ -couverts ;
2. A est fortement $\mathcal{L}$ -couvert ;
3. A et P n'ont pas de face en commun ;
4. $P \cap \overline{\Gamma \setminus (P \cup A)} = \emptyset$.

Pour (1), (2), (3), déjà fait.

Si (4) n'est pas vrai pour $\Sigma(A)$ et $\Sigma(P)$, ça veut dire qu'il existe

$$f \in P, \quad g \in \Gamma \setminus (A \cup P), \quad f' \in \Sigma(f), \quad g' \in \Sigma(g)$$

tels que $f' \cup g' \neq \emptyset$:



- ➡ On énumère **tous les cas possibles** pour $f' \cup g'$ (36 motifs).
- ➡ On étudie les **préimages** de chaque cas pour obtenir une **contradiction** si la préimage $(f \cup g)$ est **non-connexe**. (Utilise la forte couverture!)

Analyse de cas

Une analyse exhaustive de cas nous dit que **les seules préimages $f \cup g$ non-connexes possibles pour $f' \cup g'$ sont :**



Analyse de cas

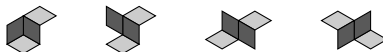
Une analyse exhaustive de cas nous dit que **les seules préimages $f \cup g$ non-connexes possibles pour $f' \cup g'$ sont :**



Les seules complétions possibles de ces motifs contredisent la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture forte.

Analyse de cas

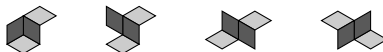
Une analyse exhaustive de cas nous dit que **les seules préimages $f \cup g$ non-connexes possibles pour $f' \cup g'$ sont :**



Les seules complétions possibles de ces motifs contredisent la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture forte.

Analyse de cas

Une analyse exhaustive de cas nous dit que **les seules préimages $f \cup g$ non-connexes possibles pour $f' \cup g'$ sont :**



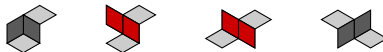
Les seules complétions possibles de ces motifs contredisent la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture forte.

$$\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \text{[corner]}, \text{[2x2 missing]}, \text{[1x3 missing]}, \text{[2x2 missing center]}, \text{[other shapes]} \right\}.$$

$$\mathcal{L}_{\text{JP}} = \left\{ \text{V-shape}, \text{L-shape}, \text{Z-shape}, \text{S-shape}, \text{W-shape}, \text{X-shape}, \text{Y-shape}, \text{U-shape}, \text{H-shape}, \text{O-shape} \right\}.$$

Analyse de cas

Une analyse exhaustive de cas nous dit que **les seules préimages $f \cup g$ non-connexes possibles pour $f' \cup g'$ sont :**

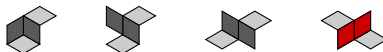


Les seules complétions possibles de ces motifs contredisent la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture forte.

$$\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \text{U-shape}, \text{L-shape}, \text{corner}, \text{2x2 block}, \text{3x1 block}, \text{1x3 block}, \text{2x2 block with center}, \text{2x2 block with center (red)}, \text{2x2 block with center (gray)} \right\}.$$

Analyse de cas

Une analyse exhaustive de cas nous dit que **les seules préimages $f \cup g$ non-connexes possibles pour $f' \cup g'$ sont :**

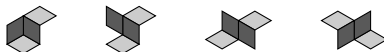


Les seules complétions possibles de ces motifs contredisent la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture forte.

$$\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \text{[corner]}, \text{[edge]}, \text{[corner]}, \text{[edge]}, \text{[corner]}, \text{[edge]}, \text{[edge]}, \text{[edge]}, \text{[cross]}, \text{[corner]}, \text{[corner]} \right\}.$$

Analyse de cas

Une analyse exhaustive de cas nous dit que **les seules préimages $f \cup g$ non-connexes possibles pour $f' \cup g'$ sont :**



Les seules complétions possibles de ces motifs contredisent la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture forte.

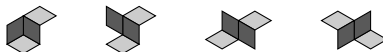
$$\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \text{[motif 1]}, \text{[motif 2]}, \text{[motif 3]}, \text{[motif 4]}, \text{[motif 5]}, \text{[motif 6]}, \text{[motif 7]}, \text{[motif 8]}, \text{[motif 9]}, \text{[motif 10]} \right\}.$$

Propriété (“lemme de l’anneau”)

La propriété de l’anneau est vraie dans les plans $\Gamma_{(a,b,c)}$ tels que $0 < a, b \leq c$.

Analyse de cas

Une analyse exhaustive de cas nous dit que **les seules préimages $f \cup g$ non-connexes possibles pour $f' \cup g'$ sont :**



Les seules complétions possibles de ces motifs contredisent la $\mathcal{L}_{JP}$ -couverture forte.

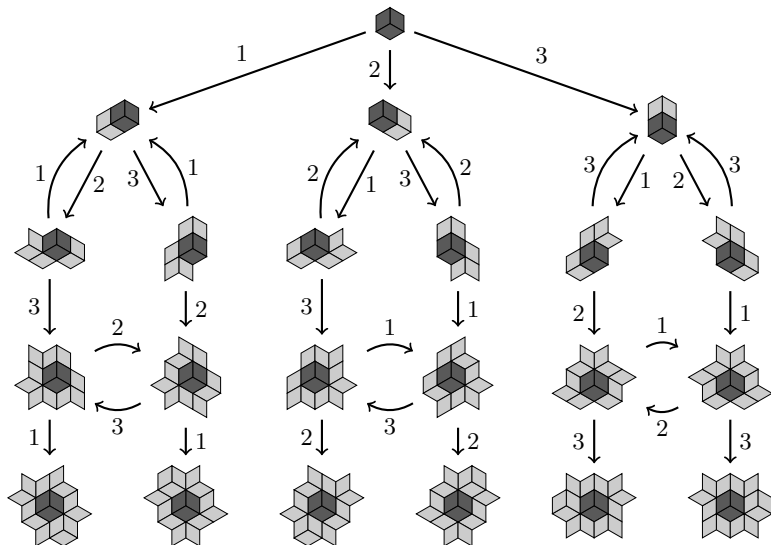
$$\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \text{cube}, \text{2 cubes sharing a face}, \text{3 cubes in a row}, \text{3 cubes in a corner}, \text{3 cubes in a flat 2x2}, \text{3 cubes in a flat 1x3}, \text{3 cubes in a cross}, \text{3 cubes in a 2x2x2 corner}, \text{3 cubes in a 2x2x2 flat} \right\}.$$

Propriété (“lemme de l’anneau”)

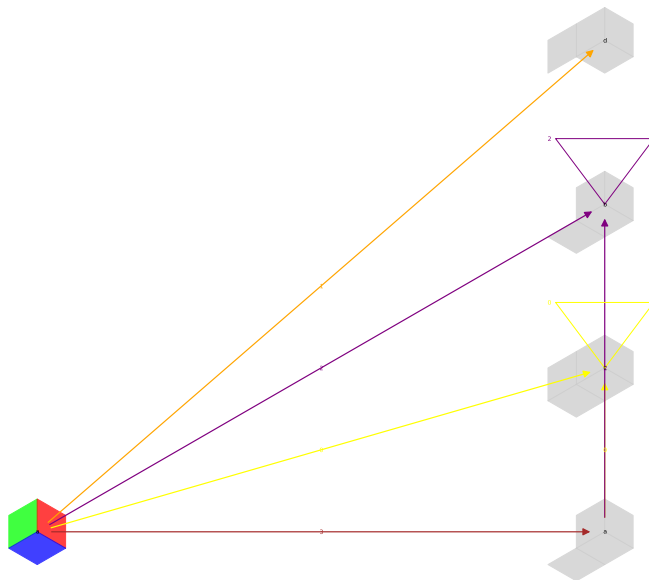
La propriété de l’anneau est vraie dans les plans $\Gamma_{(a,b,c)}$ tels que $0 < a, b \leq c$.

Il ne reste “plus qu’à” **initialiser la récurrence** à partir de $\mathcal{V}$ pour obtenir des boules croissantes !

Un exemple (pas JP) pour illustrer ce qu'on aimerait faire

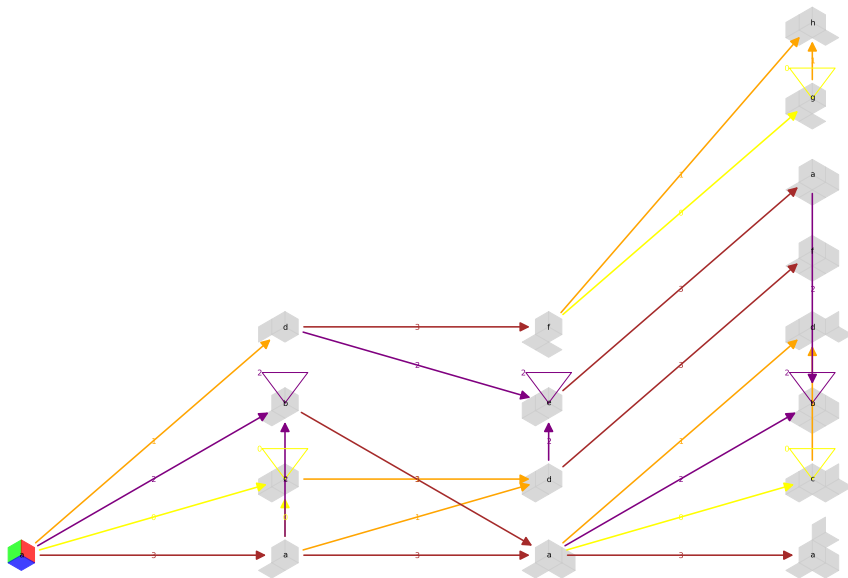


C'est moins joli pour JP...

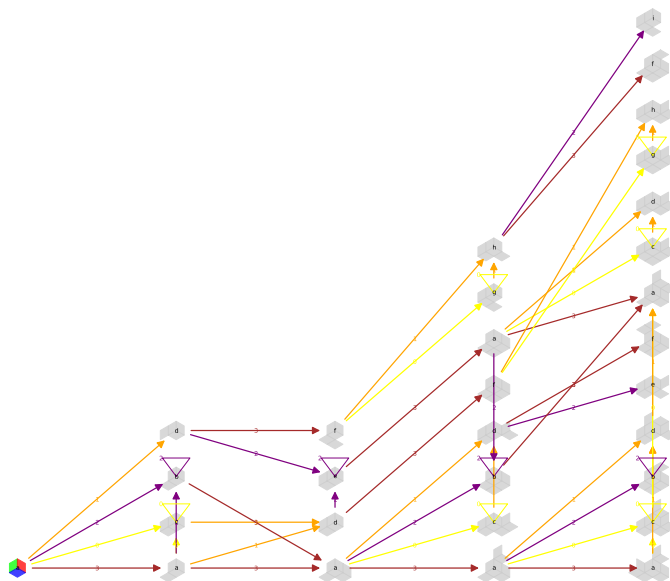


The graph consists of 10 nodes labeled a, b, c, d, e, f, g, h, i, j. The nodes are arranged in a grid-like structure. Edges are colored red, orange, yellow, and purple, and many are labeled with numbers 0, 1, 2. The graph shows a complex network of connections between the nodes.

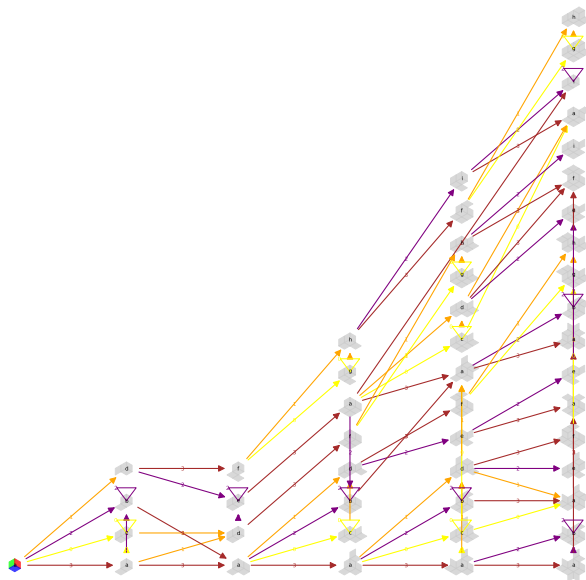
C'est moins joli pour JP...



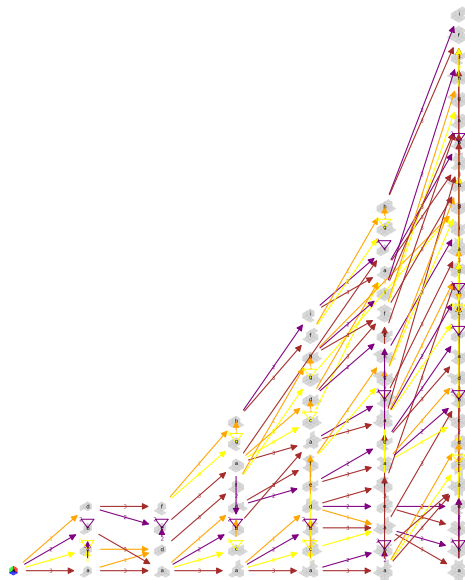
C'est moins joli pour JP...



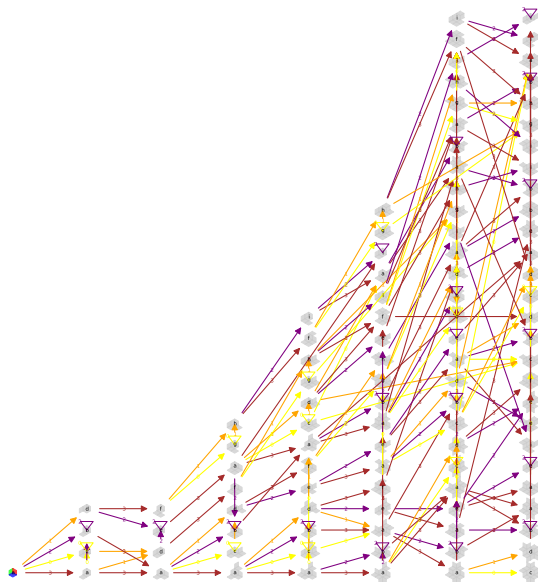
C'est moins joli pour JP...



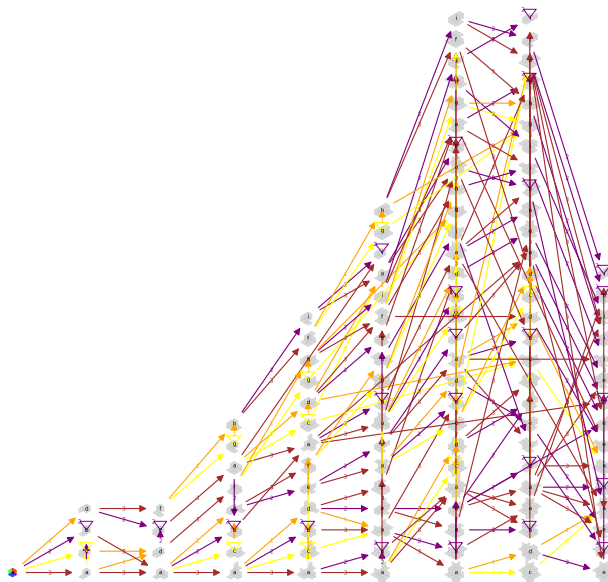
C'est moins joli pour JP...



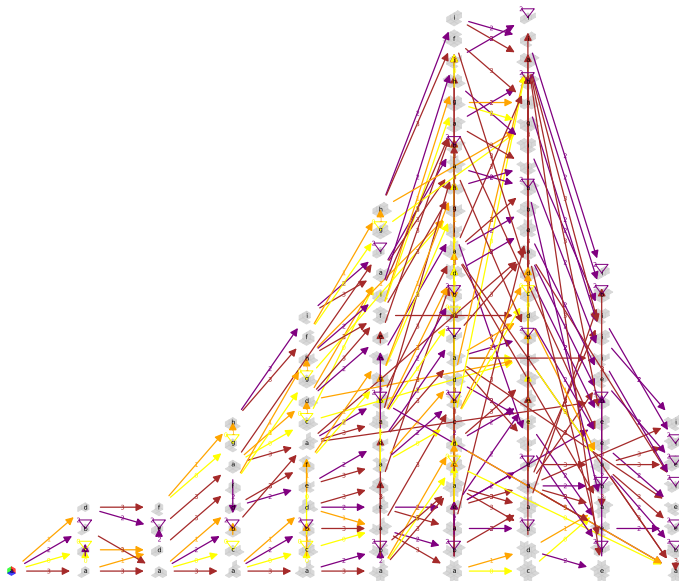
C'est moins joli pour JP...



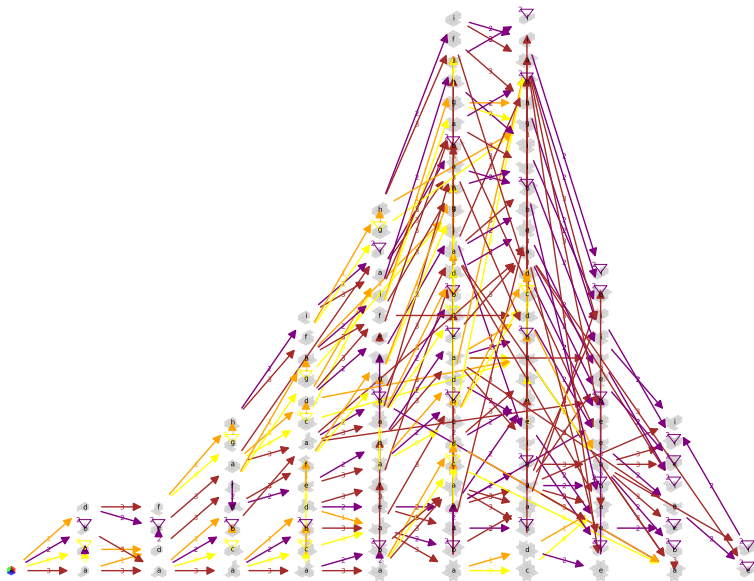
C'est moins joli pour JP...



C'est moins joli pour JP...



C'est moins joli pour JP...



Construction du graphe

La construction se fait selon le langage des développements admissibles, qui est un langage régulier.

- ➡ Décomposer $\Sigma_{B,C}$ en produit de quatre substitutions $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$
- ➡ Étudier le langage $L \subseteq \{0, 1, 2, 3\}^*$ des produits admissibles.
- ➡ Construire le graphe en itérant les produits admissibles à partir de $\mathcal{V}$.

Objectif : détecter les cycles orientés dans lesquels il n'y a aucun $\mathcal{L}_{JP}$ -anneau.

- ➡ On espère retomber sur les conditions d'Ito-Ohtsuki pour le motif $\mathcal{V}$.

Construction du graphe

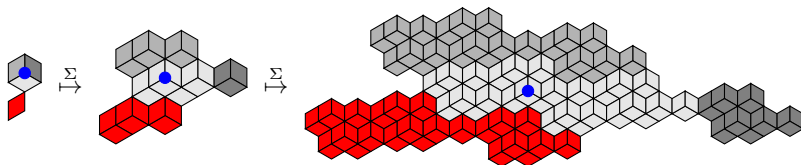
La construction se fait selon le langage des développements admissibles, qui est un langage régulier.

- ➡ Décomposer $\Sigma_{B,C}$ en produit de quatre substitutions $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$
- ➡ Étudier le langage $L \subseteq \{0, 1, 2, 3\}^*$ des produits admissibles.
- ➡ Construire le graphe en itérant les produits admissibles à partir de $\mathcal{V}$.

Objectif : détecter les cycles orientés dans lesquels il n'y a aucun $\mathcal{L}_{JP}$ -anneau.

- ➡ On espère retomber sur les conditions d'Ito-Ohtsuki pour le motif $\mathcal{V}$.

Exemple d'un cas où  **ne suffit pas** : $\Sigma = \Sigma_{1,1}\Sigma_{1,2}\Sigma_{0,1}$



Décomposition additive de $\Sigma_{B,C}$

Décomposition de $\sigma_{B,C}$:

$$\sigma_1 : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases} \quad \sigma_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 31 \end{cases} \quad \sigma_3 : \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 23 \end{cases}$$

$$\sigma_{B,C} = \sigma_3 \sigma_1^B \sigma_2^{C-1} : \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 13^B \\ 3 \mapsto 23^C \end{cases}$$

Décomposition additive de $\Sigma_{B,C}$

Décomposition de $\sigma_{B,C}$:

$$\sigma_1 : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases} \quad \sigma_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 31 \end{cases} \quad \sigma_3 : \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 23 \end{cases}$$

$$\sigma_{B,C} = \sigma_3 \sigma_1^B \sigma_2^{C-1} : \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 13^B \\ 3 \mapsto 23^C \end{cases}$$

Décomposition de $\Sigma_{B,C}$:

$$\Sigma_1 := \mathbf{E}_1^*(\sigma_1) \quad \Sigma_2 := \mathbf{E}_1^*(\sigma_2) \quad \Sigma_3 := \mathbf{E}_1^*(\sigma_3) \quad \Sigma_0 := \Sigma_1 \Sigma_2$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{B,C} &= \mathbf{E}_1^*(\sigma_{B,C}) = \Sigma_1^B \Sigma_2^{C-1} \Sigma_3 \\ &= \begin{cases} \Sigma_2^{C-1} \Sigma_3 & \text{si } B = 0 \\ \Sigma_0^{B-1} \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_2^{C-B-1} \Sigma_3 & \text{si } B \neq 0, B < C \\ \Sigma_0^{B-1} \Sigma_1 \Sigma_3 & \text{si } B \neq 0, B = C \end{cases} \end{aligned}$$

Une suite $(B_n, C_n)_{n \geq 1}$ est admissible si pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq B_n \leq C_n, \quad C_n \geq 1, \quad B_n = C_n \implies B_{n+1} \neq 0.$$

Une suite $(B_n, C_n)_{n \geq 1}$ est admissible si pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq B_n \leq C_n, \quad C_n \geq 1, \quad B_n = C_n \implies B_{n+1} \neq 0.$$

Langage des contraintes : On définit d'abord les langages suivants, que l'on peut « lire » dans l'Équation du slide précédent :

$$\begin{aligned} L_1 &= 2^*3 & (B = 0) \\ L_2 &= 0^*122^*3 & (B \neq 0, B < C) \\ L_3 &= 0^*13 & (B \neq 0, B = C) \end{aligned}$$

Si $B_n < C_n$ (L_1 ou L_2), pas de contrainte sur (B_{n+1}, C_{n+1}) . Si $B_n = C_n$ (L_3), alors :

- soit $B_{n+1} \neq 0$ et $B_{n+1} < C_{n+1}$ (L_2), alors plus de contrainte ;
- soit $B_{n+1} \neq 0$ et $B_{n+1} = C_{n+1}$ (L_3 de nouveau).

Une suite $(B_n, C_n)_{n \geq 1}$ est admissible si pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq B_n \leq C_n, \quad C_n \geq 1, \quad B_n = C_n \implies B_{n+1} \neq 0.$$

Langage des contraintes : On définit d'abord les langages suivants, que l'on peut « lire » dans l'Équation du slide précédent :

$$\begin{aligned} L_1 &= 2^*3 && (B = 0) \\ L_2 &= 0^*122^*3 && (B \neq 0, B < C) \\ L_3 &= 0^*13 && (B \neq 0, B = C) \end{aligned}$$

Si $B_n < C_n$ (L_1 ou L_2), pas de contrainte sur (B_{n+1}, C_{n+1}) . Si $B_n = C_n$ (L_3), alors :

- soit $B_{n+1} \neq 0$ et $B_{n+1} < C_{n+1}$ (L_2), alors plus de contrainte ;
- soit $B_{n+1} \neq 0$ et $B_{n+1} = C_{n+1}$ (L_3 de nouveau).

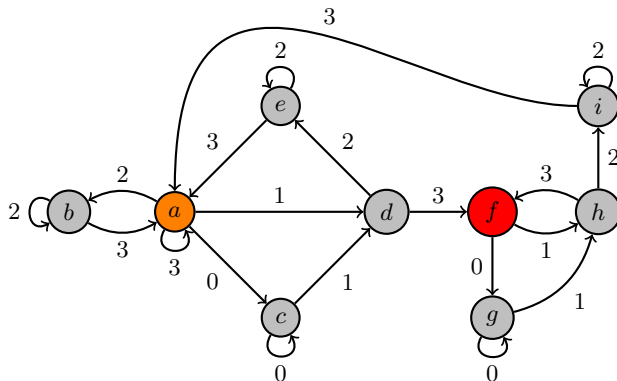
On obtient le langage des produits admissibles suivant :

$$L = (L_1 \cup L_2 \cup (L_3 L_3^* L_2))^* L_3^*$$

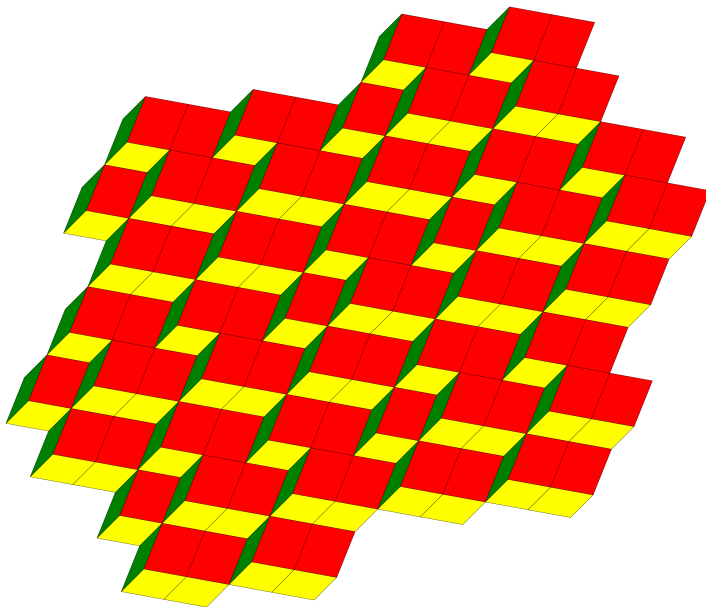
Les éléments de L sont exactement les produits admissibles de $\Sigma_{B,C}$:

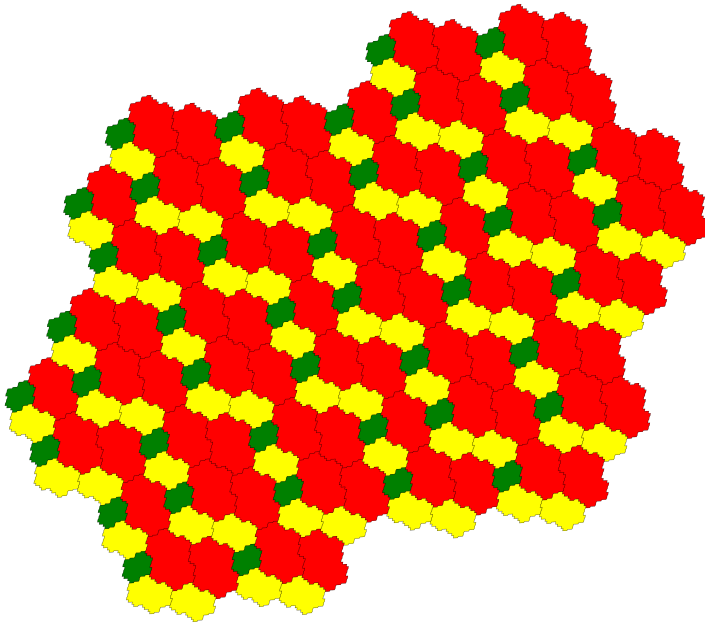
$$\{\Sigma_{i_1} \cdots \Sigma_{i_n} : i_1 \cdots i_n \in L\} = \{\Sigma_{B_1, C_1} \cdots \Sigma_{B_n, C_n} : (B_k, C_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ est admissible}\}$$

Graphe du langage des développements admissibles



Le sommet orange est l'état initial. Les sommets orange et rouge sont les états finaux. (Un état final n'est atteint qu'après 3.)





Merci de votre attention.

Des questions ?