

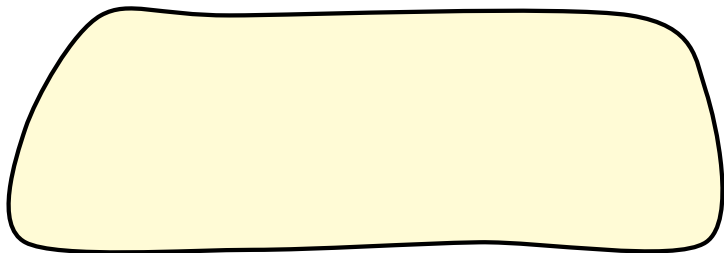
Automorphismes du tore, partitions de Markov et fractals

Timo Jolivet

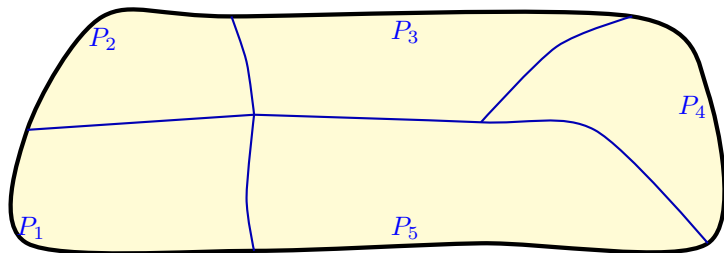
Université Paris 7 (LIAFA) et
Université de Turku, Finlande

**Séminaire des thésards de l'IMJ
jeudi 23 février 2012**

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$

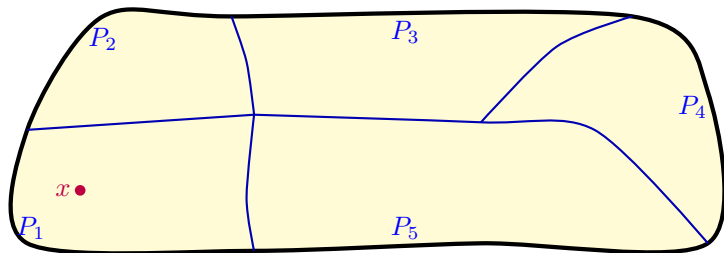


Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

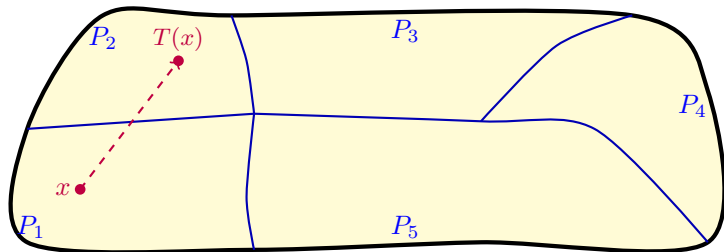
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : 1

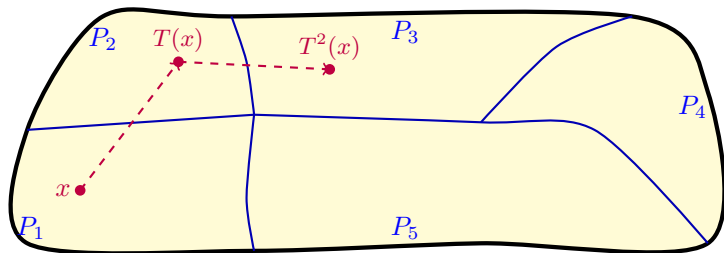
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : 1 2

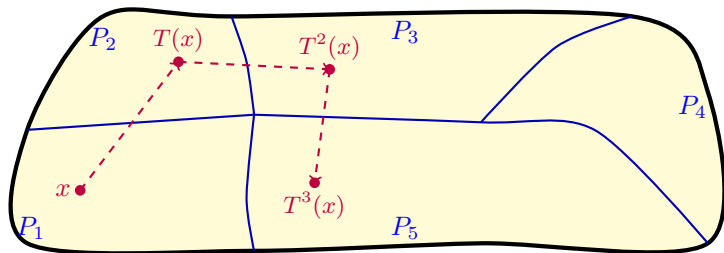
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : 1 2 3

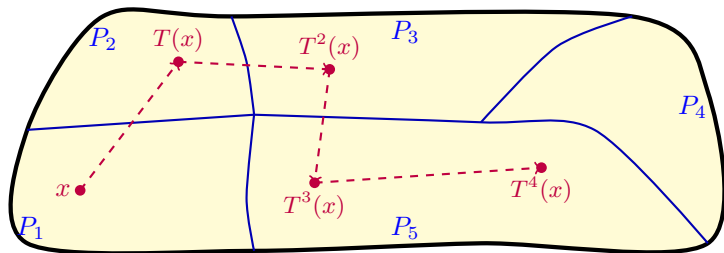
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : 1 2 3 5

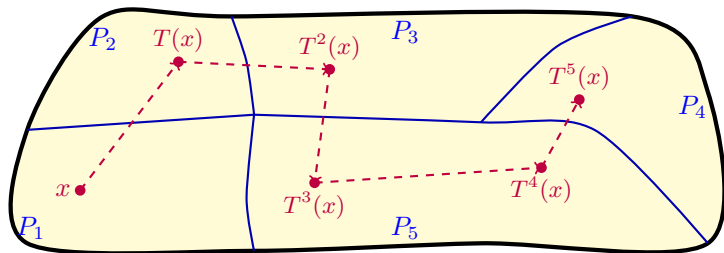
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : 1 2 3 5 5

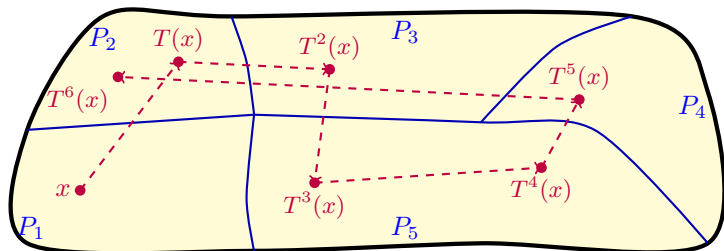
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : 1 2 3 5 5 4

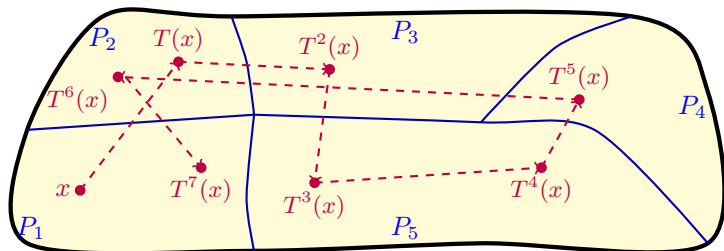
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : 1 2 3 5 5 4 2

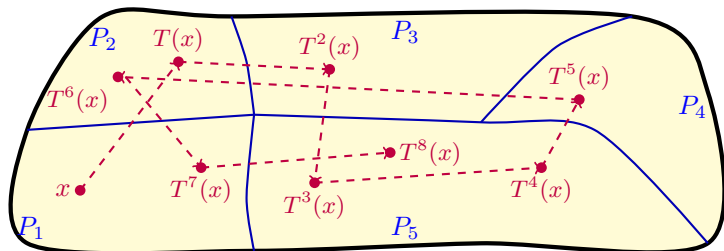
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : 1 2 3 5 5 4 2 1

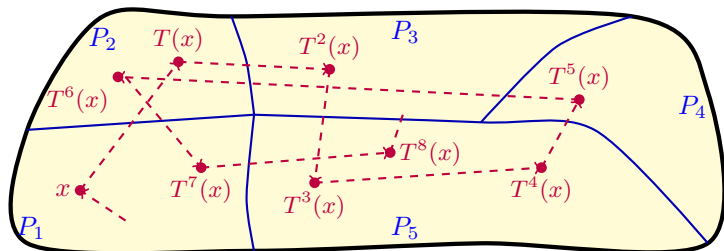
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : 1 2 3 5 5 4 2 1 5

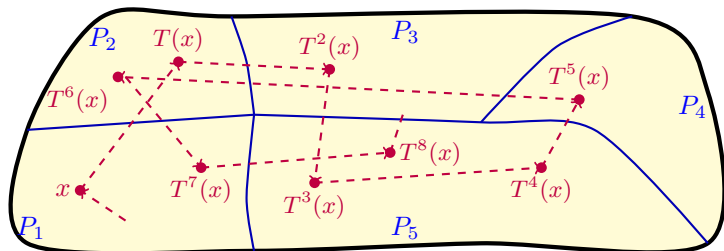
Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : $\cdots 1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5\ \cdots$

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$

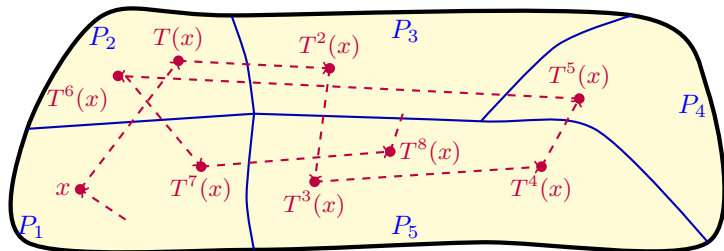


Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : $\cdots 1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5\ \cdots$

➡ Soit $\Sigma_{\mathcal{P}} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble de tous les codages

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



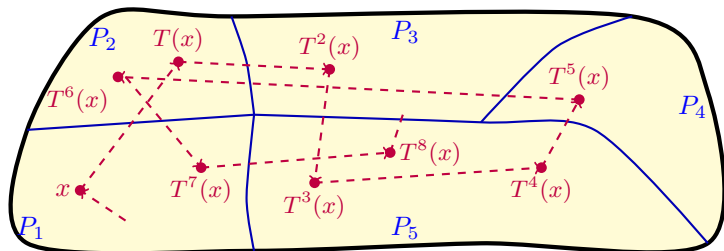
Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : $\cdots 1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5\ \cdots$

➡ Soit $\Sigma_{\mathcal{P}} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble de tous les codages

$(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage d'une lettre})$: système dynamique symbolique

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

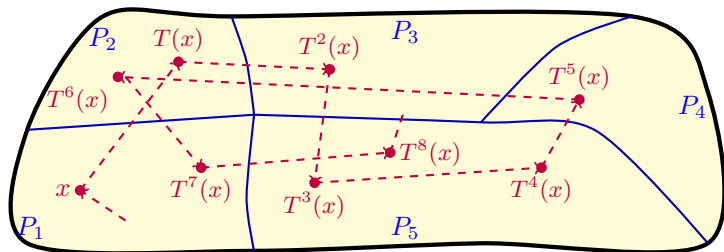
Codage de x : $\cdots 1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5\ \cdots$

➡ Soit $\Sigma_{\mathcal{P}} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble de tous les codages

$(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage d'une lettre})$: système dynamique symbolique

➡ **Idée** : Comprendre (X, T) grâce à $(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$



Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Codage de x : $\cdots 1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5\ \cdots$

➡ Soit $\Sigma_{\mathcal{P}} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble de tous les codages

$(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage d'une lettre})$: système dynamique symbolique

➡ **Idée** : Comprendre (X, T) grâce à $(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$

➡ Il faut bien choisir la partition $\mathcal{P}$ pour que $\Sigma_{\mathcal{P}}$ approxime bien X

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$

- $\mathcal{P}$ est bien choisie si :

À tout codage $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$:

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$

► $\mathcal{P}$ est bien choisie si :

À tout codage $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$:

$$\begin{array}{rcl} & \dots & \\ T^{-1}(x) & \in & P_{x_{-1}} \\ x & \in & P_{x_0} \\ T(x) & \in & P_{x_1} \\ T^2(x) & \in & P_{x_2} \\ & \dots & \end{array}$$

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$

► $\mathcal{P}$ est bien choisie si :

À tout codage $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$:

$$\begin{array}{rcccl} \dots & & \dots & & \\ T^{-1}(x) & \in & P_{x_{-1}} & & x \in T(P_{x_{-1}}) \\ x & \in & P_{x_0} & \iff & x \in P_{x_0} \\ T(x) & \in & P_{x_1} & & x \in T^{-1}(P_{x_1}) \\ T^2(x) & \in & P_{x_2} & & x \in T^{-2}(P_{x_2}) \\ \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$

► $\mathcal{P}$ est bien choisie si :

À tout codage $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & & \dots & & & & \\ T^{-1}(x) & \in & P_{x_{-1}} & & x & \in & T(P_{x_{-1}}) \\ x & \in & P_{x_0} & & x & \in & P_{x_0} \\ T(x) & \in & P_{x_1} & \iff & x & \in & T^{-1}(P_{x_1}) \\ T^2(x) & \in & P_{x_2} & & x & \in & T^{-2}(P_{x_2}) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array} \iff x \in \underbrace{\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}(P_{x_n})}_{= \{x\}}$$

Coder les orbites de $T : X \rightarrow X$

► $\mathcal{P}$ est bien choisie si :

À tout codage $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$:

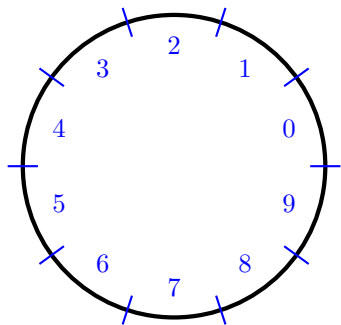
$$\begin{array}{ccccc}
 \dots & & \dots & & \\
 T^{-1}(x) & \in & P_{x_{-1}} & & x \in T(P_{x_{-1}}) \\
 x & \in & P_{x_0} & \iff & x \in P_{x_0} \\
 T(x) & \in & P_{x_1} & \iff & x \in T^{-1}(P_{x_1}) \\
 T^2(x) & \in & P_{x_2} & \iff & x \in T^{-2}(P_{x_2}) \\
 \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}
 \iff x \in \underbrace{\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}(P_{x_n})}_{= \{x\}}$$

► On a alors : une **représentation symbolique** de (X, T) par $\mathcal{P}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\text{décalage}} & \Sigma_{\mathcal{P}} \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 X & \xrightarrow{T} & X
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \varphi : (x_n) \mapsto \text{l'unique } x \in \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}(P_{x_n}) \\
 \varphi \text{ continue et surjective} \\
 (\text{pas forcément injective})
 \end{array}$$

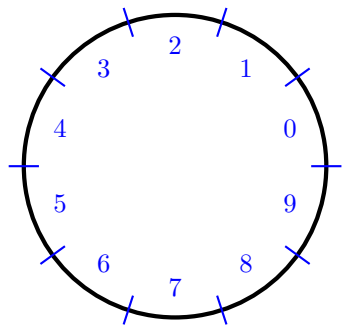
Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

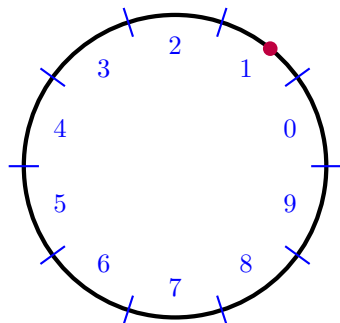
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

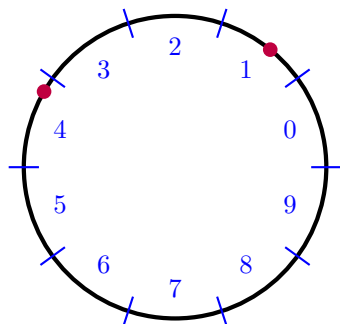
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.1

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

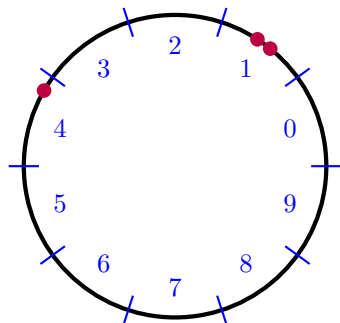
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.14

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

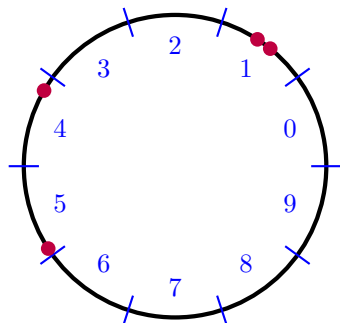
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.141

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

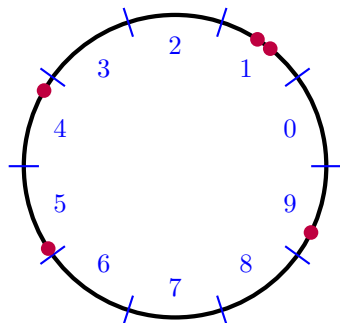
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.1415

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

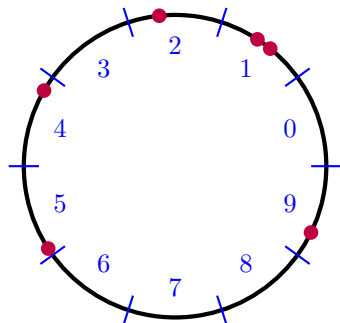
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.14159

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

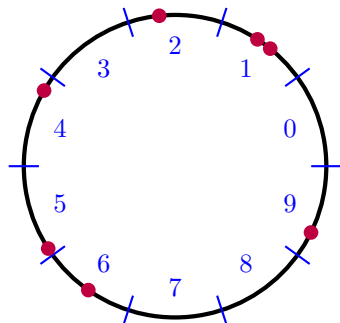
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.141592

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

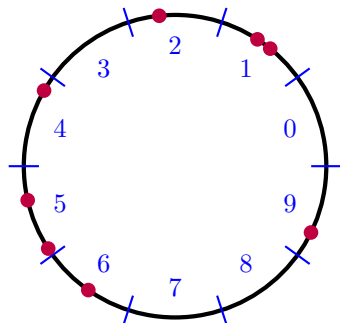
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.1415926

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

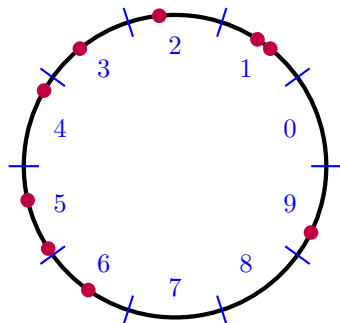
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.14159265

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

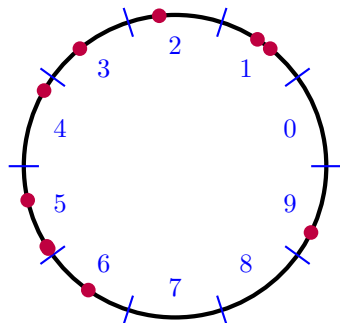
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.141592653

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

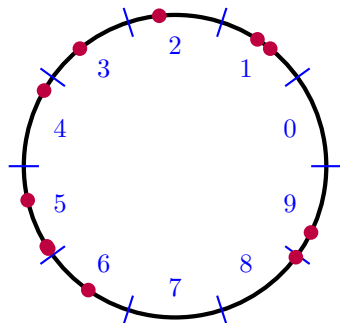
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.1415926535

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

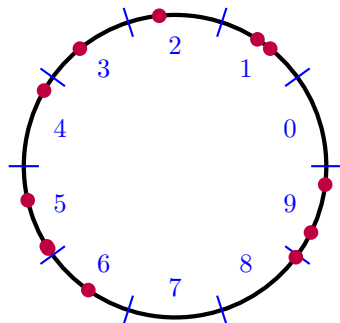
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.14159265358

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

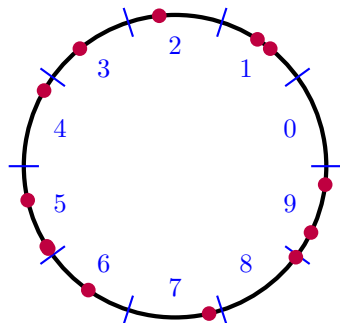
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.141592653589

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

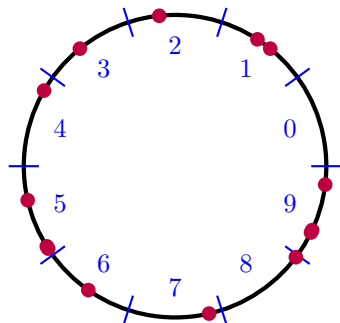
$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:
0.1415926535897

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{]\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} [: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$

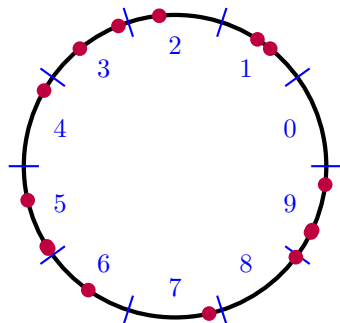


Orbite de $\pi - 3$:

0.14159265358979312...

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:

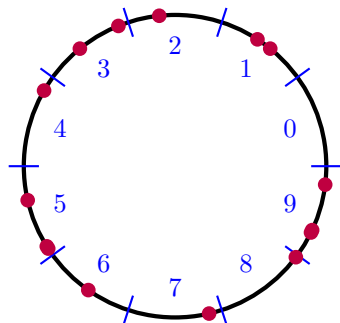
0.14159265358979312...

Codages $\iff$ expansions décimales

Codages valides : $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{Z}}$

Exemple 1 : multiplication par 10 sur $[0, 1]$

$$X = [0, 1] \quad T : x \mapsto 10x \pmod{1} \quad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leq i \leq 9 \right\}$$



Orbite de $\pi - 3$:

0.14159265358979312...

Codages $\iff$ expansions décimales

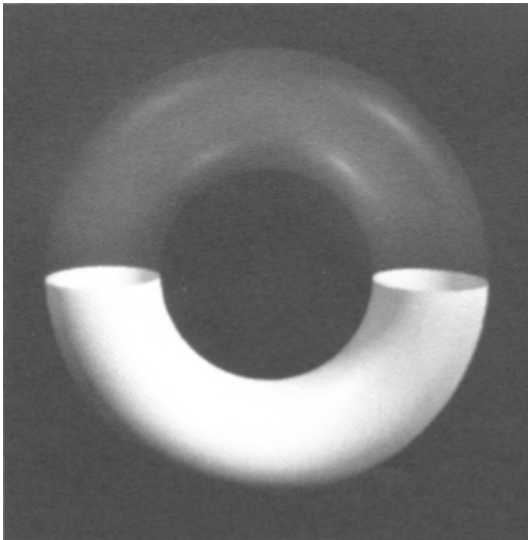
Codages valides : $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{Z}}$

Le codage $\varphi : \Sigma_{\mathcal{P}} \rightarrow X$ n'est pas injectif :

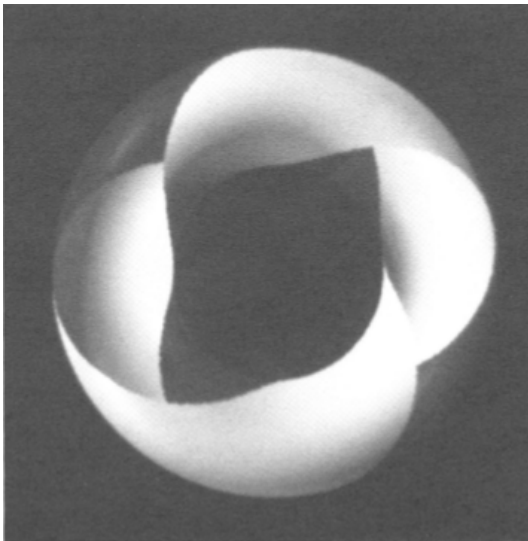
0.999... = 1.000... ou 0.46999... = 0.47000...

(les nombres décimaux ont deux pré-images)

Automorphismes du tore

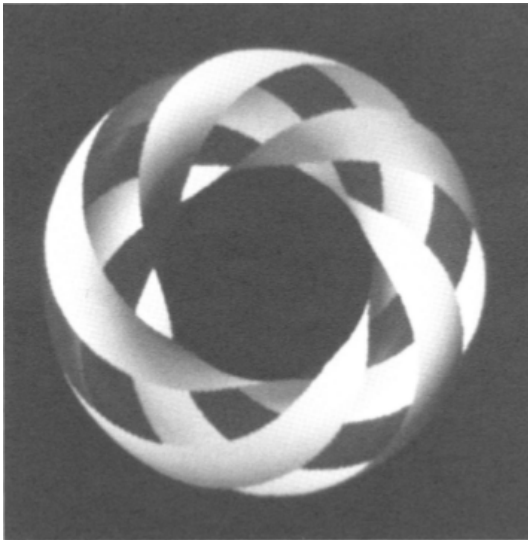


Images : *Visualizing Toral Automorphisms*, M. Grayson, B. Kitchens, G. Zettler



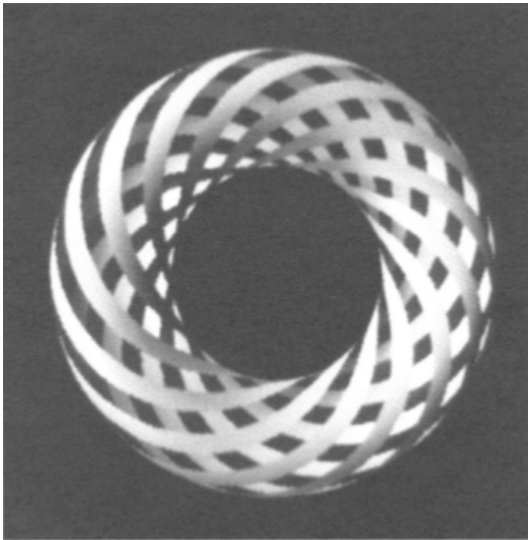
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1$$

Images : *Visualizing Toral Automorphisms*, M. Grayson, B. Kitchens, G. Zettler



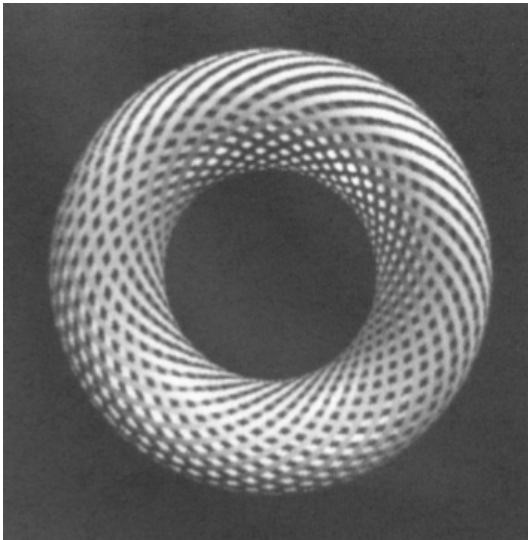
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

Images : *Visualizing Toral Automorphisms*, M. Grayson, B. Kitchens, G. Zettler



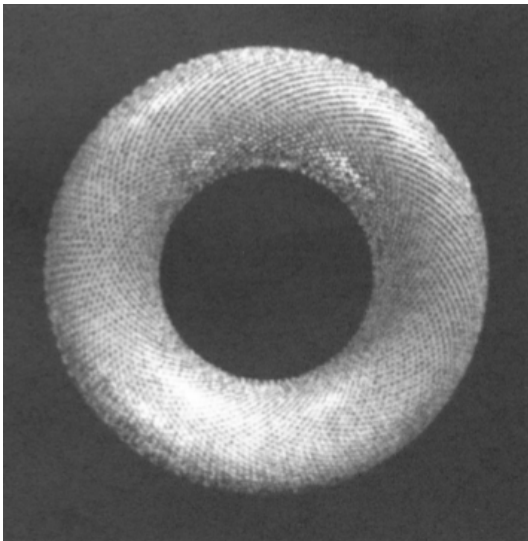
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3$$

Images : *Visualizing Toral Automorphisms*, M. Grayson, B. Kitchens, G. Zettler



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4$$

Images : *Visualizing Toral Automorphisms*, M. Grayson, B. Kitchens, G. Zettler

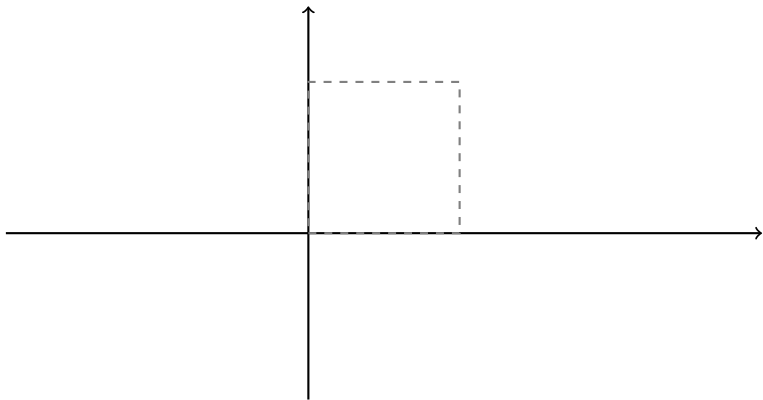


$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$$

Images : *Visualizing Toral Automorphisms*, M. Grayson, B. Kitchens, G. Zettler

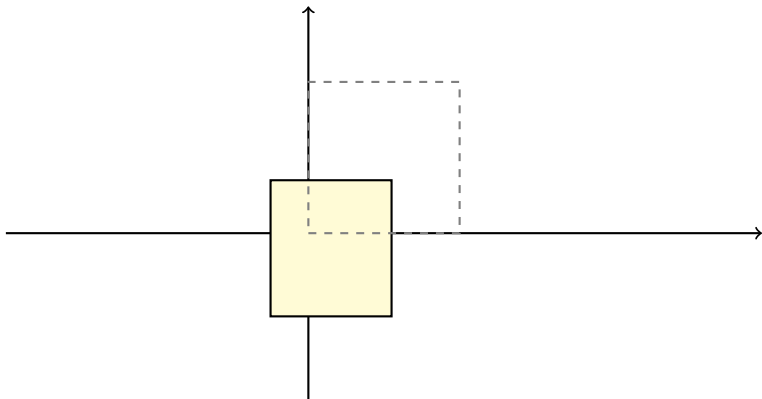
Exemple 2 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0, 1]^2$

Système dynamique T : $\begin{cases} [0, 1]^2 & \rightarrow [0, 1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \pmod{1} \end{cases}$



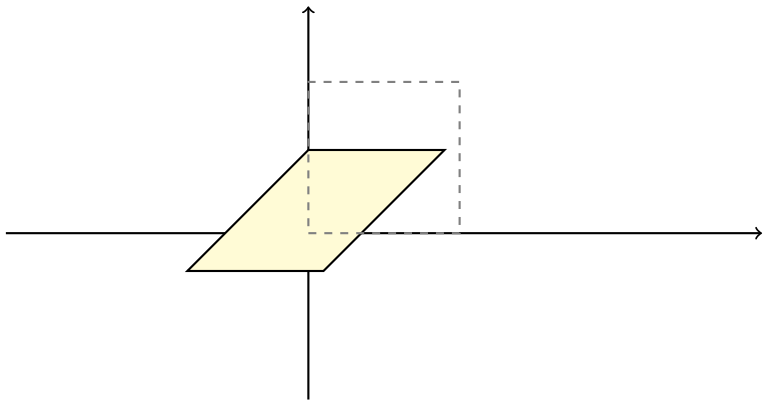
Exemple 2 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0, 1]^2$

Système dynamique T : $\begin{cases} [0, 1]^2 & \rightarrow [0, 1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \pmod{1} \end{cases}$



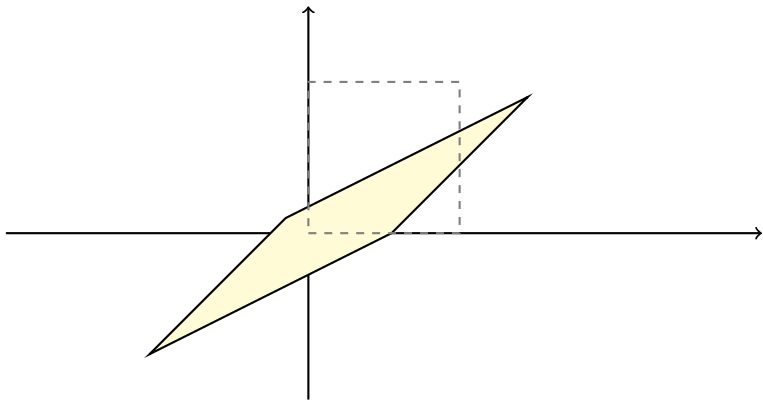
Exemple 2 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0, 1]^2$

Système dynamique T : $\begin{cases} [0, 1]^2 & \rightarrow [0, 1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \pmod{1} \end{cases}$



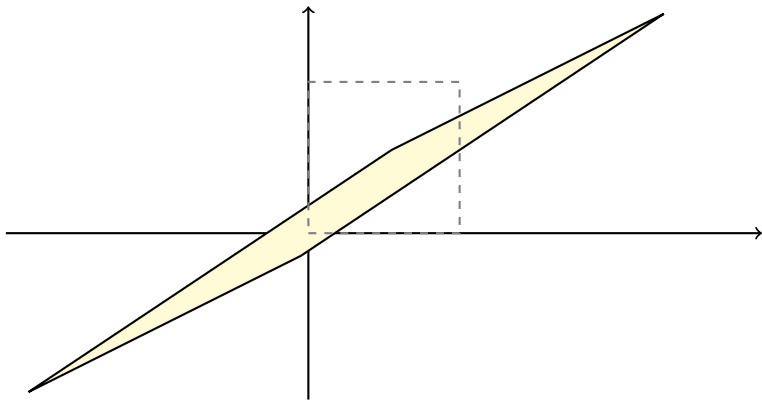
Exemple 2 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0, 1]^2$

Système dynamique T : $\begin{cases} [0, 1]^2 & \rightarrow [0, 1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \pmod{1} \end{cases}$



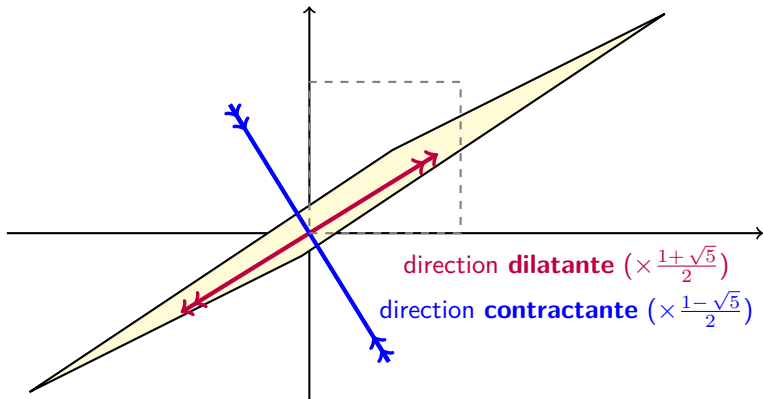
Exemple 2 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0, 1]^2$

Système dynamique T : $\begin{cases} [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \pmod{1} \end{cases}$

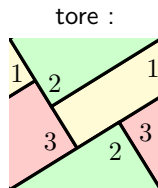
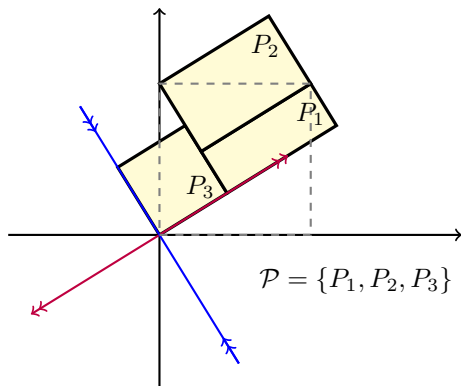


Exemple 2 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0, 1]^2$

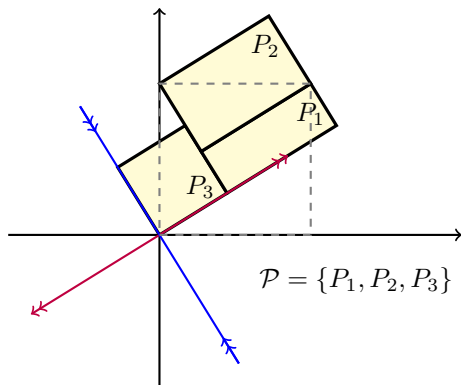
Système dynamique T : $\begin{cases} [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \pmod{1} \end{cases}$



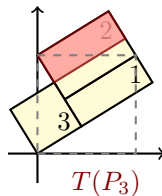
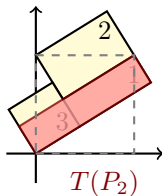
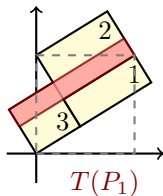
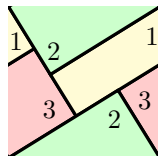
Choix d'une partition de $[0, 1]^2$



Choix d'une partition de $[0, 1]^2$



tore :



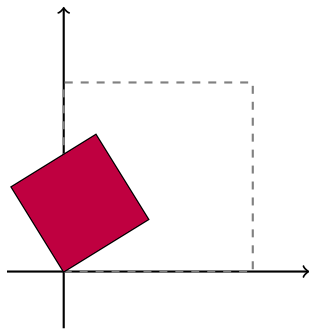
$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.

Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :



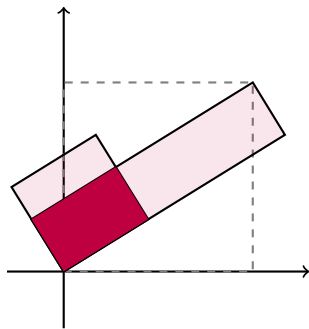
3

P_3

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.

Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :



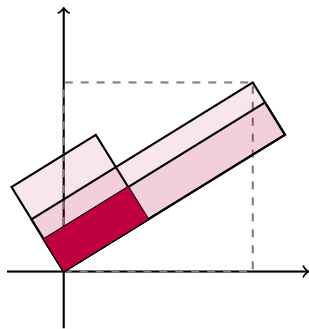
$\underline{23}$

$$T(P_2) \cap P_3$$

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.

Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :



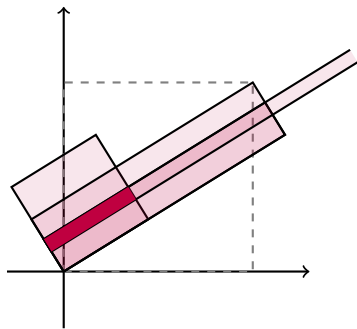
$32\underline{3}$

$$T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3$$

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.

Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :



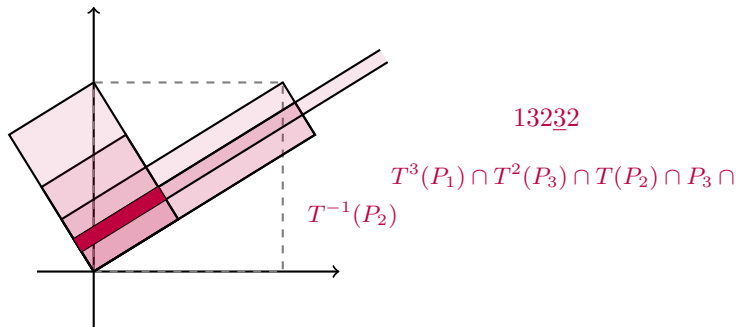
1323

$$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3$$

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

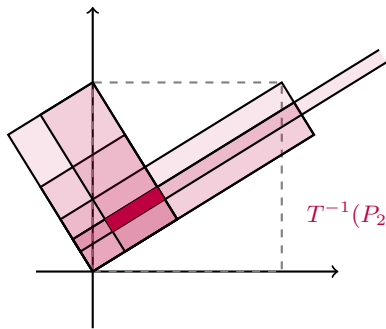
On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.

Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :



$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :

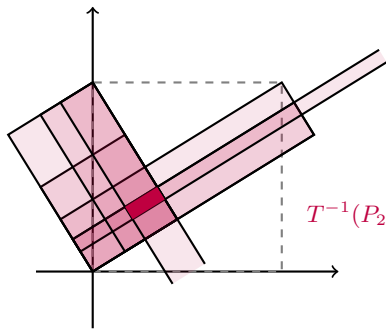


132321

$$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap \\ T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1)$$

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :

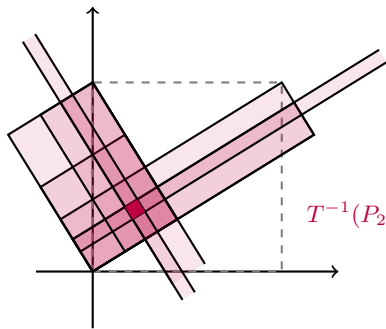


1323212

$$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap \\ T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1) \cap T^{-3}(P_2)$$

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :

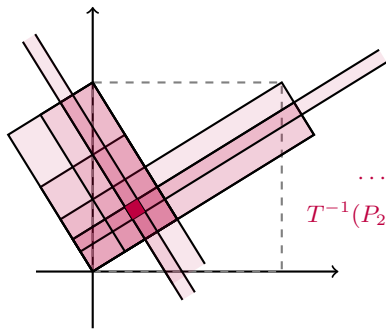


13232123

$$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap \\ T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1) \cap T^{-3}(P_2) \cap T^{-3}(P_3)$$

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :



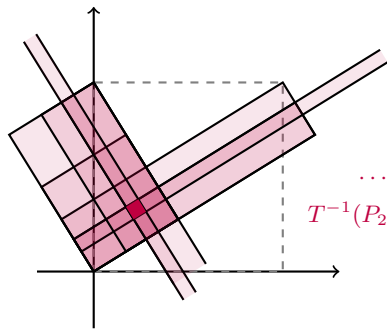
$\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$

$$\cdots T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap \\ T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1) \cap T^{-3}(P_2) \cap T^{-3}(P_3) \cdots$$

Un seul point à la limite !

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, pour la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$ on a :



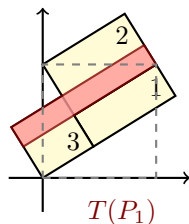
$\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$

$$\cdots T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap \\ T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1) \cap T^{-3}(P_2) \cap T^{-3}(P_3) \cdots$$

Un seul point à la limite !

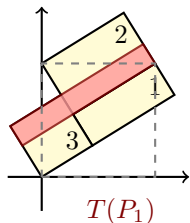
$(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$ est donc une **bonne représentation** de (X, T) .

Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$

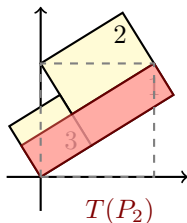


admissible : 12, 13

Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$

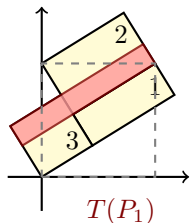


admissible : 12, 13

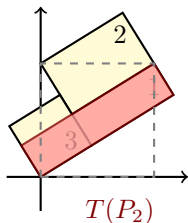


admissible : 21, 23

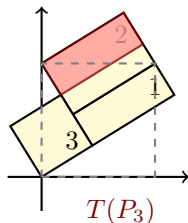
Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



admissible : 12, 13

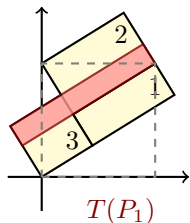


admissible : 21, 23

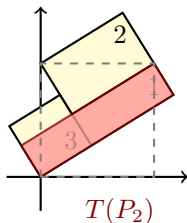


admissible : 32

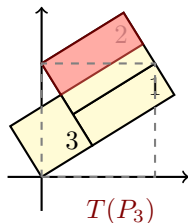
Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



$T(P_1)$
admissible : 12, 13



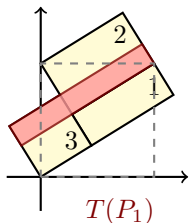
$T(P_2)$
admissible : 21, 23



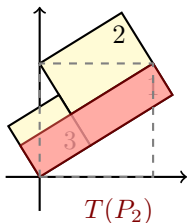
$T(P_3)$
admissible : 32

- Inspection géométrique : ij et jk admissibles $\implies ijk$ admissible
 ➡ k ne dépend pas de i dans ijk (propriété markovienne)

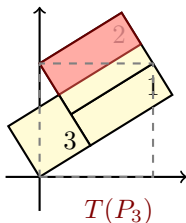
Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



admissible : 12, 13



admissible : 21, 23

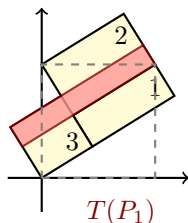


admissible : 32

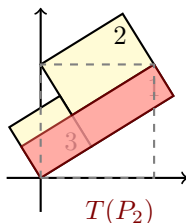
- Inspection géométrique : ij et jk admissibles $\implies ijk$ admissible
 $\hookrightarrow k$ ne dépend pas de i dans ijk (propriété markovienne)

Donc : $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\text{suites ne contenant pas } 11, 22, 31, 33\} \subseteq \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}.$

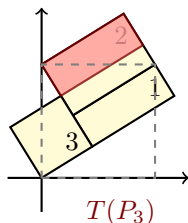
Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



$T(P_1)$
admissible : 12, 13



$T(P_2)$
admissible : 21, 23



$T(P_3)$
admissible : 32

- Inspection géométrique : ij et jk admissibles $\implies ijk$ admissible
 $\hookrightarrow k$ ne dépend pas de i dans ijk (propriété **markovienne**)

Donc : $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\text{suites ne contenant pas } 11, 22, 31, 33\} \subseteq \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$.

- $\hookrightarrow (\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$ est un **sous-shift de type fini**
- $\hookrightarrow$ on dit alors que $\mathcal{P}$ est une **partition de Markov**

Conséquences

- ▶ $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est transitif donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ l'est aussi.
- ▶ $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est mélangeant donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ l'est aussi.
- ▶ Les points périodiques de $\Sigma_{\mathcal{P}}$ sont denses, donc ceux de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ le sont aussi.
- ▶ Calcul de l'entropie facile.

Conséquences

- ▶ $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est transitif donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ l'est aussi.
- ▶ $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est mélangeant donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ l'est aussi.
- ▶ Les points périodiques de $\Sigma_{\mathcal{P}}$ sont denses, donc ceux de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ le sont aussi.
- ▶ Calcul de l'entropie facile.

Plus généralement :

Théorème [Berg 67, Adler-Weiss 67]

On sait construire une partition de Markov pour toute matrice 2×2 à coefficients entiers, de déterminant ± 1 et hyperbolique.

➡ Constructions explicites : deux rectangles suffisent toujours

Conséquences

- ▶ $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est transitif donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ l'est aussi.
- ▶ $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est mélangeant donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ l'est aussi.
- ▶ Les points périodiques de $\Sigma_{\mathcal{P}}$ sont denses, donc ceux de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ le sont aussi.
- ▶ Calcul de l'entropie facile.

Plus généralement :

Théorème [Berg 67, Adler-Weiss 67]

On sait construire une partition de Markov pour toute matrice 2×2 à coefficients entiers, de déterminant ± 1 et hyperbolique.

- ➡ Constructions explicites : deux rectangles suffisent toujours
- ➡ Deux tels systèmes sont conjugués en mesure ss'ils ont la même entropie.

Dimension 3 ou plus ?

Théorème ☺[Sinaï 68, Bowen 70's]

Des partitions de Markov existent en **dimension quelconque**, pour toute matrice à **coeffs entiers**, de **déterminant ± 1** et **hyperbolique**.

- ➡ “Optimal” : $\exists$ v.p. de module 1 $\implies$ pas de telle partition [Lind 78]
- ➡ Mais : constructions **non-explicites**...

Dimension 3 ou plus ?

Théorème ☺[Sinaï 68, Bowen 70's]

Des partitions de Markov existent en **dimension quelconque**, pour toute matrice à **coeffs entiers**, de **déterminant ± 1** et **hyperbolique**.

- ➡ “Optimal” : $\exists$ v.p. de module 1 $\implies$ pas de telle partition [Lind 78]
- ➡ Mais : constructions **non-explicites**...
- ➡ Pire encore :

Dimension 3 ou plus ?

Théorème ☺[Sinaï 68, Bowen 70's]

Des partitions de Markov existent en **dimension quelconque**, pour toute matrice à **coeffs entiers**, de **déterminant ± 1** et **hyperbolique**.

- ➡ “Optimal” : $\exists$ v.p. de module 1 $\implies$ pas de telle partition [Lind 78]
- ➡ Mais : constructions **non-explicites**...
- ➡ Pire encore :

Théorème ☹[Bowen 78, Cawley 91]

En dimension ≥ 3 , les morceaux ont une **frontière fractale**.

- ➡ Cela réduit les espérances de constructions explicites (pas de pavés !)

Dimension 3 ou plus ?

Théorème ☺[Sinaï 68, Bowen 70's]

Des partitions de Markov existent en **dimension quelconque**, pour toute matrice à **coeffs entiers**, de **déterminant ± 1** et **hyperbolique**.

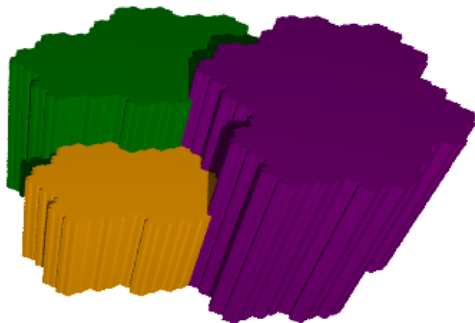
- ➡ “Optimal” : $\exists$ v.p. de module 1 $\implies$ pas de telle partition [Lind 78]
- ➡ Mais : constructions **non-explicites**...
- ➡ Pire encore :

Théorème ☹[Bowen 78, Cawley 91]

En dimension ≥ 3 , les morceaux ont une **frontière fractale**.

- ➡ Cela réduit les espérances de constructions explicites (pas de pavés !)
- ➡ **Mais pourtant...**

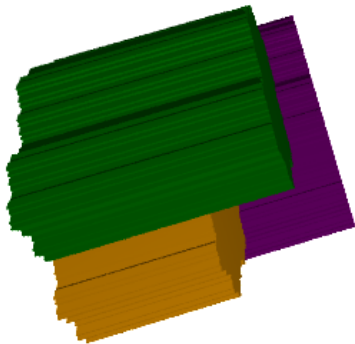
Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!



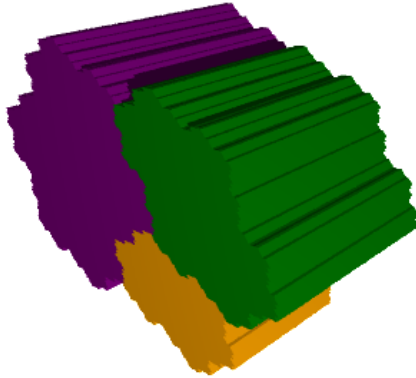
Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!



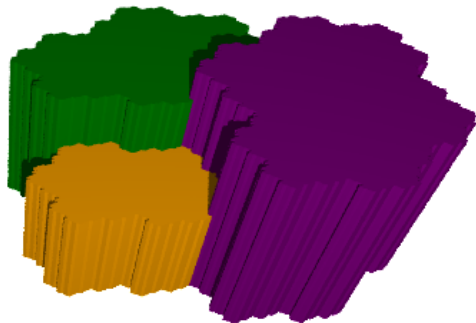
Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!



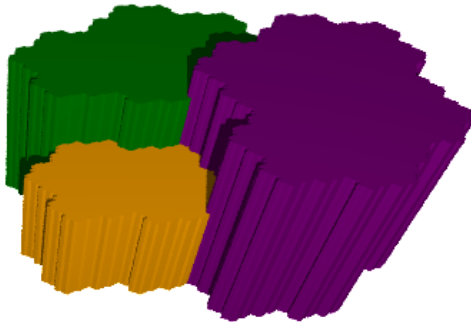
Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!



Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

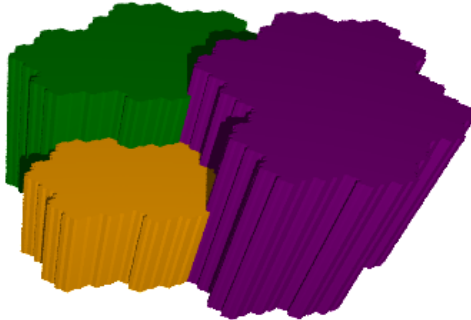


Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!



- Ça pave $\mathbb{R}^3$ périodiquement (partition de Markov du tore)

Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!



- ▶ Ça pave $\mathbb{R}^3$ périodiquement (partition de Markov du tore)
- ▶ Comment construire ce genre de partitions ?

Interlude : substitutions et fractals de Rauzy

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1213

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12131213

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 & \mapsto & 12 \\ 2 & \mapsto & 13 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{cases} \qquad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

121312131213121

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1213121312131211213121121312

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1213121312131211213121121312121312112131212131211213...

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1213121312131211213121121312121312112131212131211213...

σ est de *type Pisot* :

- ▶ **Exactement une** v.p. dilatante β
- ▶ Les autres v.p. sont contractantes

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1213121312131211213121121312121312112131212131211213...

σ est de *type Pisot* :

- ▶ **Exactement une** v.p. *dilatante* β
- ▶ Les autres v.p. sont *contractantes*

Action de $\mathbf{M}_\sigma$ sur $\mathbb{R}^3$:

- ▶ Une **droite dilatante** engendrée par le vecteur propre associé à β
- ▶ Un **plan contractant** engendré par les autres vecteurs propres

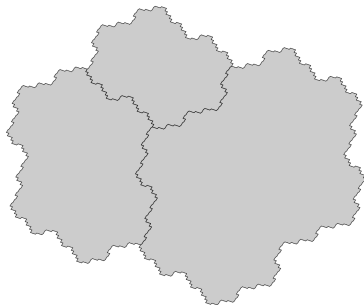
Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



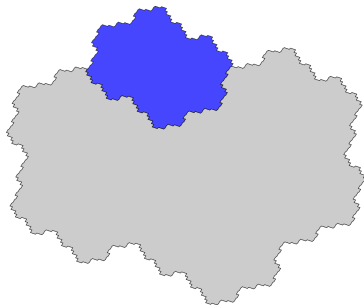
Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



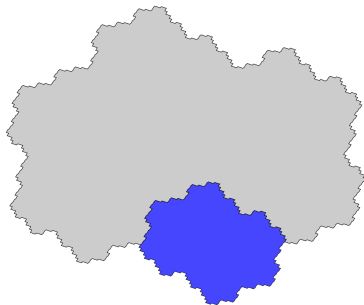
Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



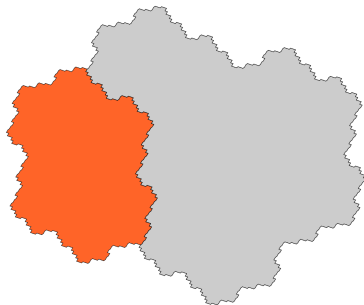
Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



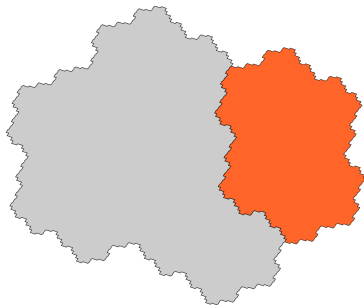
Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



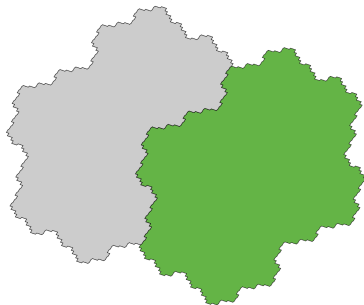
Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



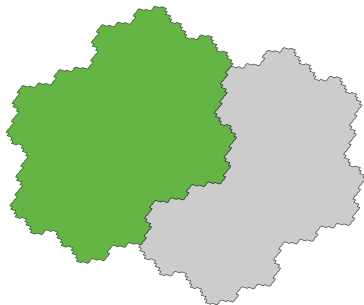
Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



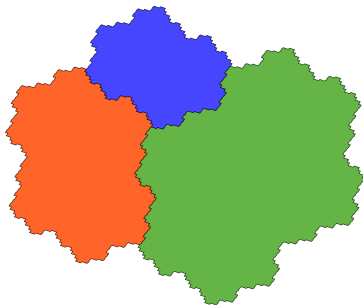
Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



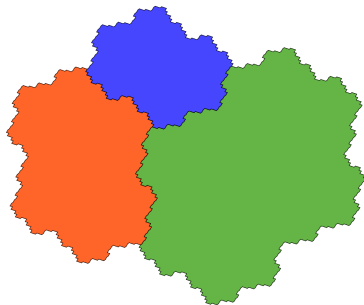
Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



Outils : substitutions, fractals de Rauzy

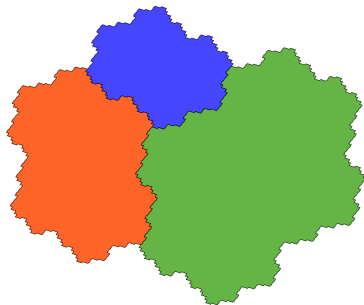
Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



- Compact

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

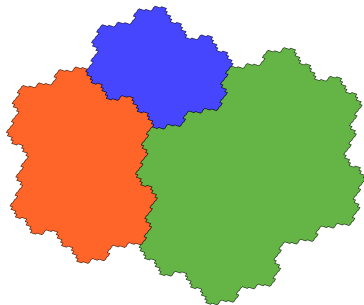
Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve
le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



- ▶ Compact
- ▶ Frontière fractale

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

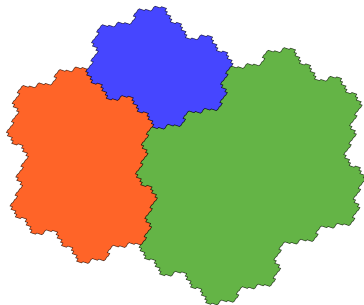
Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



- ▶ Compact
- ▶ Frontière fractale
- ▶ Structure auto-similaire

Outils : substitutions, fractals de Rauzy

Dans le plan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ se trouve le **Fractal de Rauzy** associé à σ . [Rauzy 1982, Arnoux-Ito 2001]



- ▶ Compact
- ▶ Frontière fractale
- ▶ Structure auto-similaire
- ▶ Échange de morceaux

Propriétés : dynamique des substitutions

- ▶ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

Propriétés : dynamique des substitutions

- ▶ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$
- ▶ Point fixe $x = 1$

Propriétés : dynamique des substitutions

- ▶ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$
- ▶ Point fixe $x = 12$

Propriétés : dynamique des substitutions

- ▶ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$
- ▶ Point fixe $x = 121312$

Propriétés : dynamique des substitutions

- ▶ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$
- ▶ Point fixe $x = 12131212112121312$

Propriétés : dynamique des substitutions

- ▶ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$
- ▶ Point fixe $x = 1213121211212131212131212121312121312121 \dots$

Propriétés : dynamique des substitutions

- ▶ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$
- ▶ Point fixe $x = 1213121211212131212131212121312121312121 \dots$
- ▶ $X_\sigma = \overline{\{\text{décalage}^n(x) : x \in \mathbb{Z}\}} \subseteq \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$

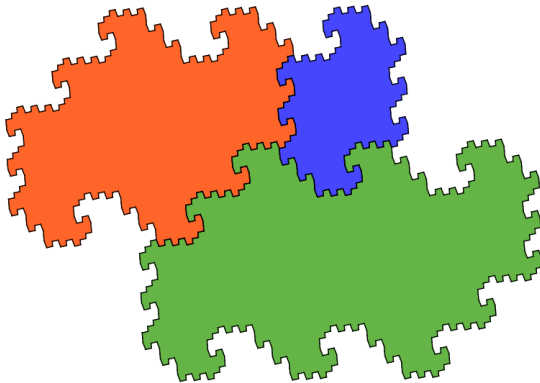
Propriétés : dynamique des substitutions

- ▶ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$
- ▶ Point fixe $x = 121312121121212131212131212121312121312121 \dots$
- ▶ $X_\sigma = \overline{\{\text{décalage}^n(x) : x \in \mathbb{Z}\}} \subseteq \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$
- ▶ Système dynamique symbolique $(X_\sigma, \text{décalage}) \dots$

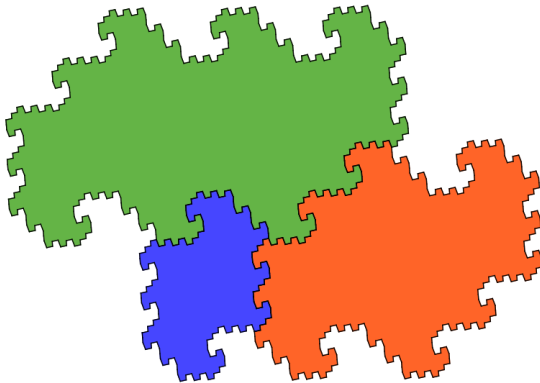
Propriétés : dynamique des substitutions

- ▶ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$
- ▶ Point fixe $x = 12131212112121312121312121312121312121 \dots$
- ▶ $X_\sigma = \overline{\{\text{décalage}^n(x) : x \in \mathbb{Z}\}} \subseteq \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$
- ▶ Système dynamique symbolique $(X_\sigma, \text{décalage}) \dots$
- ▶ ... de nature différente des systèmes $\Sigma_{\mathcal{P}}$ rencontrés avant :
 - ▶ système minimal,
 - ▶ entropie nulle,
 - ▶ pas de type fini,
 - ▶ pas de points périodiques, ...

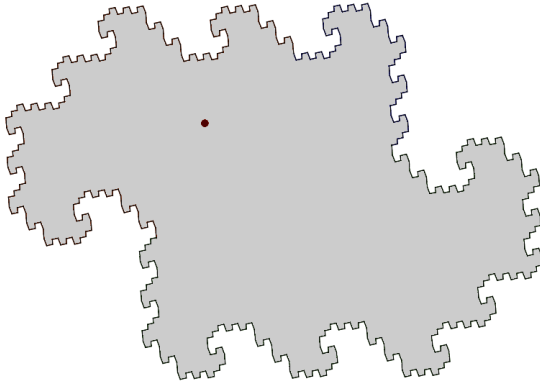
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$



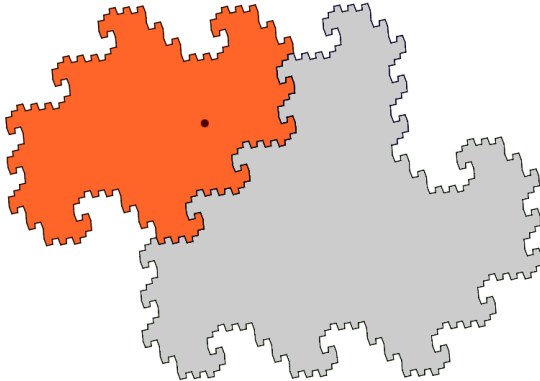
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$



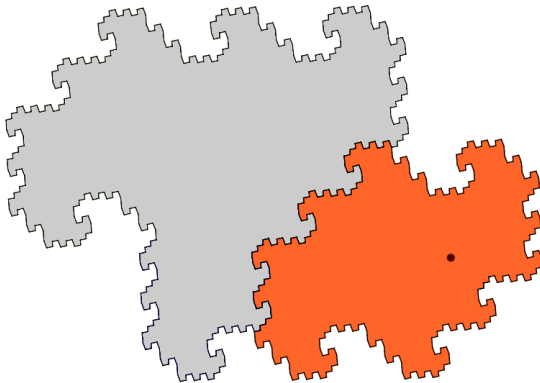
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$



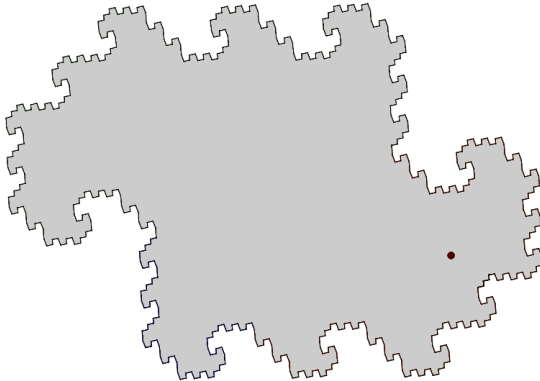
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$



Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

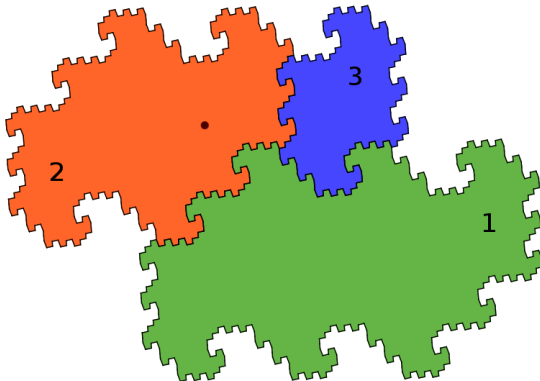


Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$



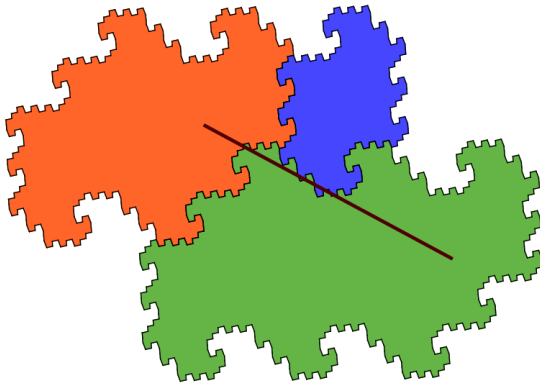
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 2



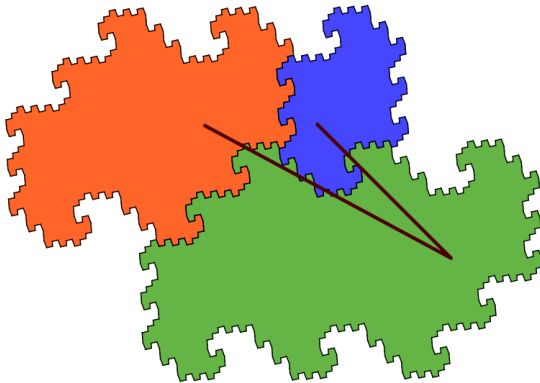
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 21



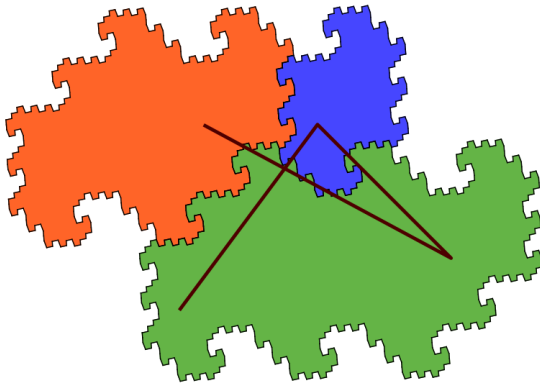
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 213



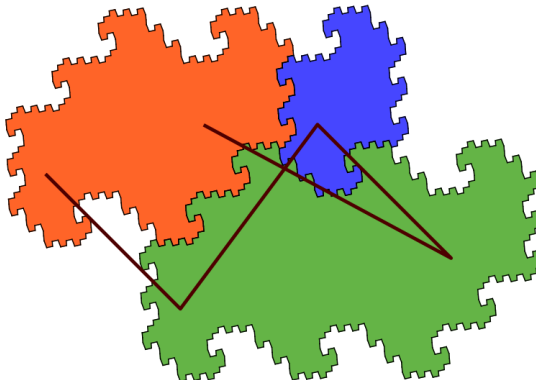
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 2131



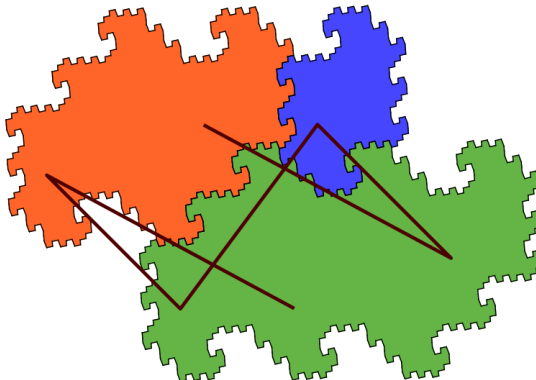
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 21312



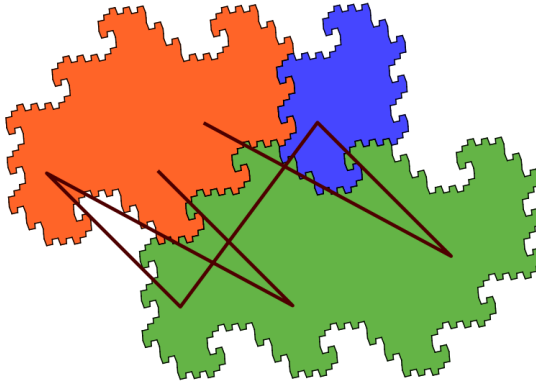
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 213121



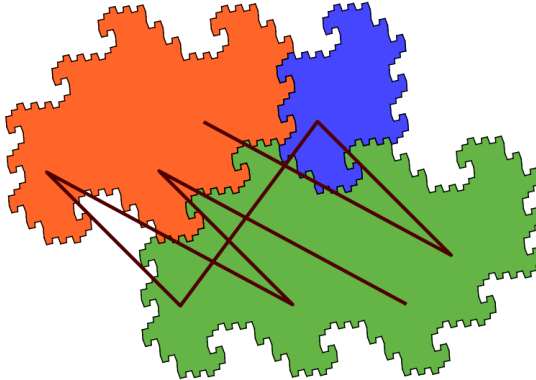
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 2131212



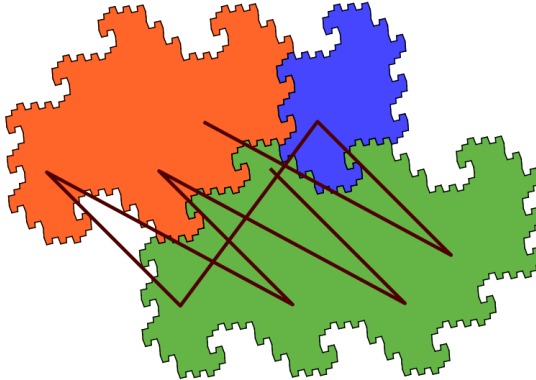
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 21312121



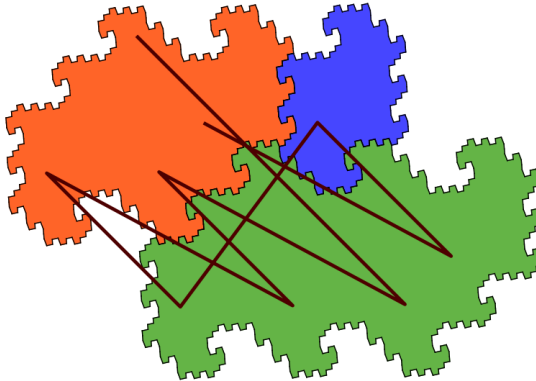
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 213121211



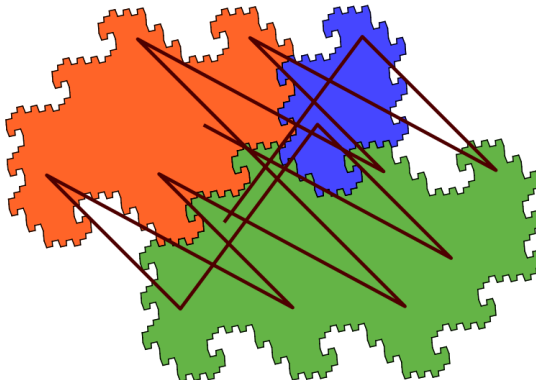
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 2131212112



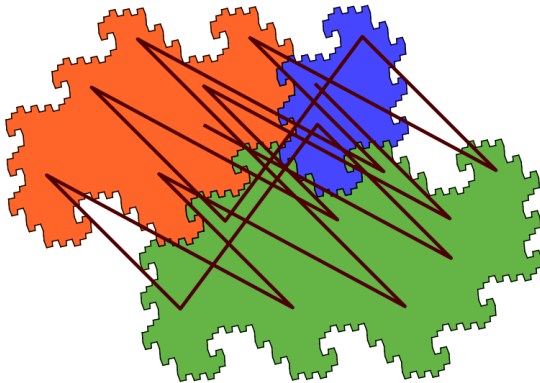
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 213121211212131



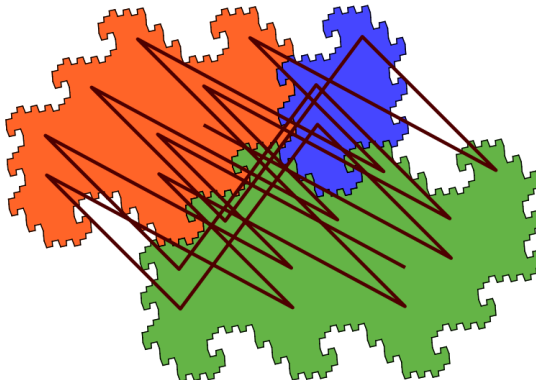
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 21312121121213121213



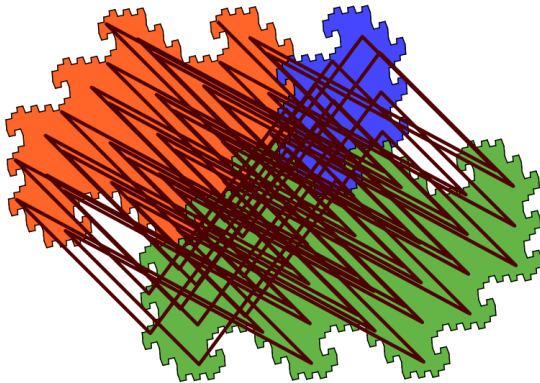
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : 2131212112121312121312121



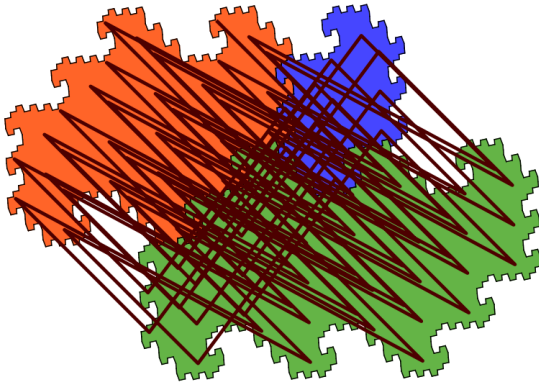
Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : $\cdots 21312121112121312121312121 \cdots \in X_\sigma \subseteq \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$



Propriétés : réalisation géométrique de $(X_\sigma, \text{décalage})$

Orbite : $\cdots 2131212112121312121312121 \cdots \in X_\sigma \subseteq \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$

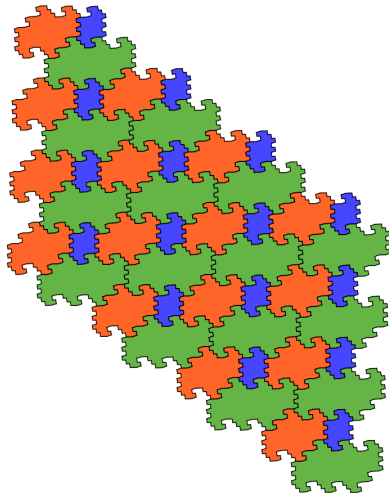
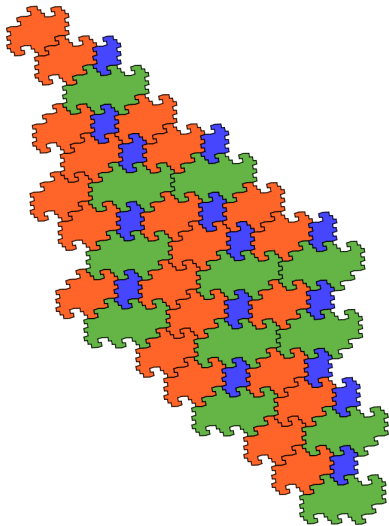


$$\left(X_\sigma, \text{décalage} \right) \cong \left(\text{image}, \text{échange} \right)$$

Propriétés : pavages du plan

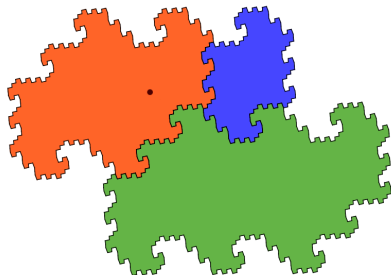
Pavage auto-similaire (apériodique) :

Pavage périodique :

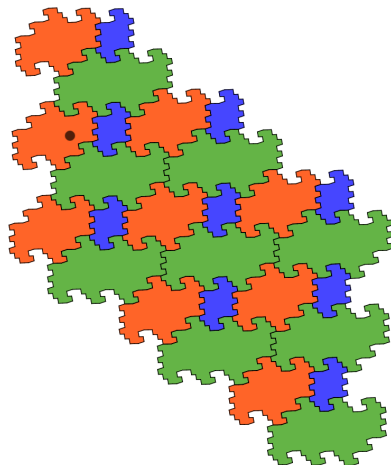


Propriétés : dynamique de σ , suite

Échange de morceaux :



Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:

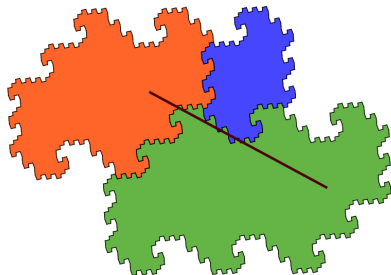


Décalage :

$$\dots \underline{2}131212112 \dots \in X_\sigma$$

Propriétés : dynamique de σ , suite

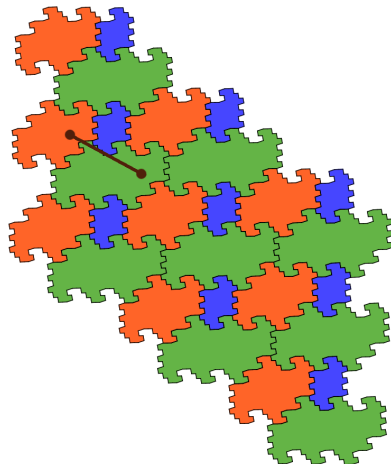
Échange de morceaux :



Décalage :

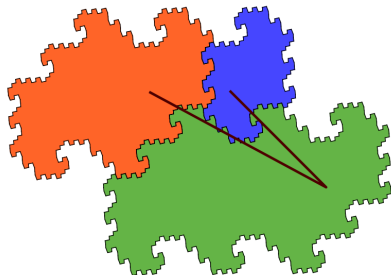
$$\dots \underline{2}1\underline{3}1212112 \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Propriétés : dynamique de σ , suite

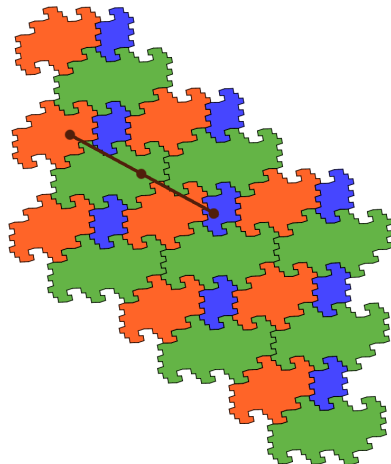
Échange de morceaux :



Décalage :

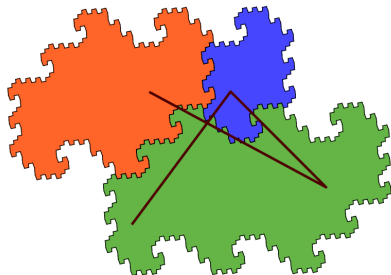
$$\dots \textcolor{red}{2}\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{3}\textcolor{red}{1}\textcolor{green}{2}\textcolor{red}{1}\textcolor{green}{2}\textcolor{red}{1}\textcolor{green}{2} \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Propriétés : dynamique de σ , suite

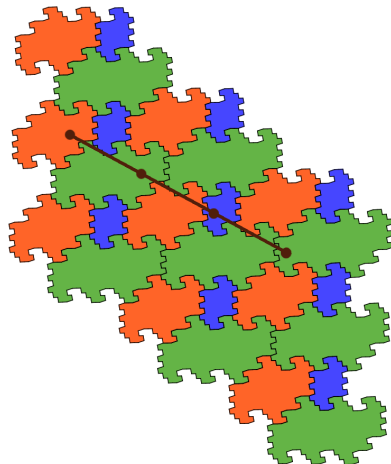
Échange de morceaux :



Décalage :

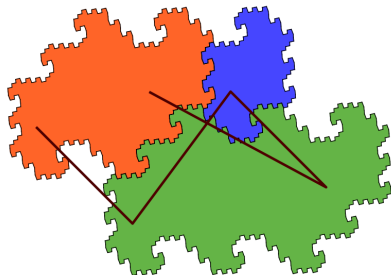
$$\dots 213\underline{12}12112 \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Propriétés : dynamique de σ , suite

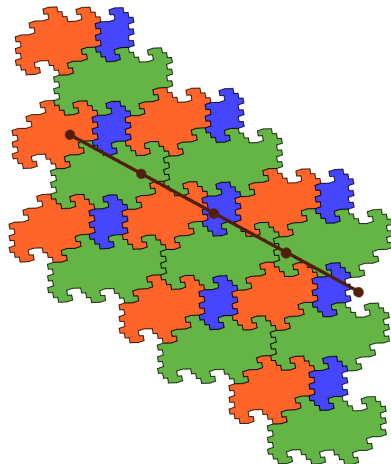
Échange de morceaux :



Décalage :

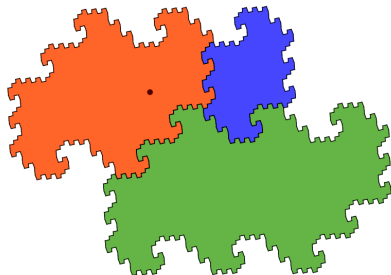
$$\dots \textcolor{red}{2}\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{3}\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{1}\textcolor{red}{2}\textcolor{green}{1}\textcolor{red}{2} \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:

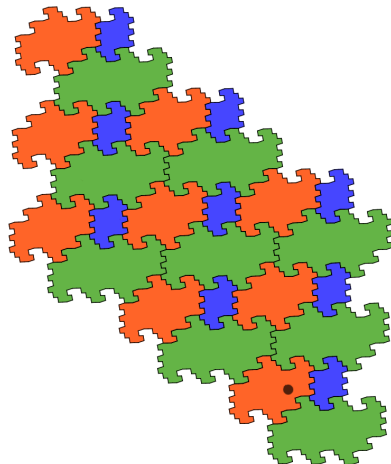


Propriétés : dynamique de σ , suite

Échange de morceaux :



Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:

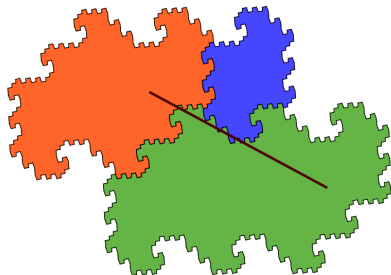


Décalage :

$$\dots \underline{2}131212112 \dots \in X_\sigma$$

Propriétés : dynamique de σ , suite

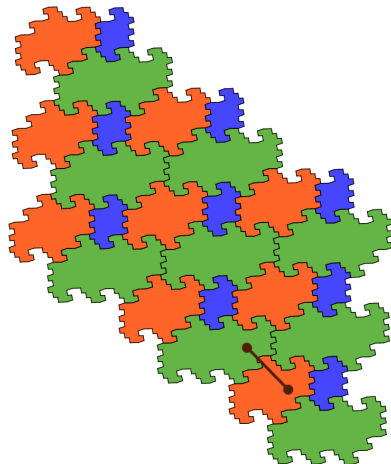
Échange de morceaux :



Décalage :

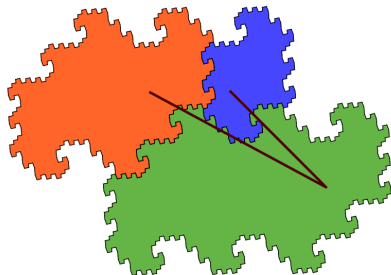
$$\dots \underline{2}1\underline{3}1212112 \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:

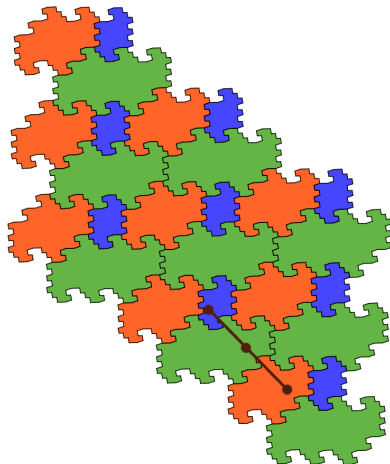


Propriétés : dynamique de σ , suite

Échange de morceaux :



Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:

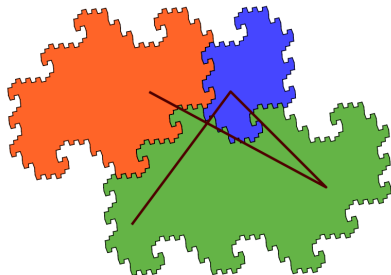


Décalage :

$$\dots \textcolor{red}{2}\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{3}\textcolor{red}{1}\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{1}\textcolor{red}{2}\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{2} \dots \in X_\sigma$$

Propriétés : dynamique de σ , suite

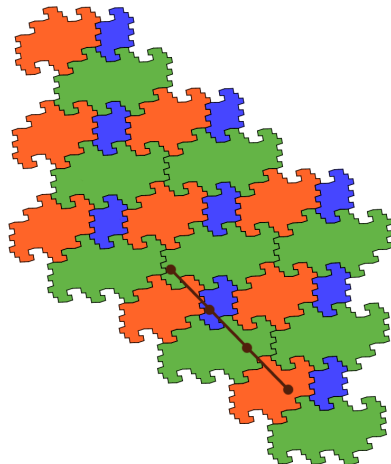
Échange de morceaux :



Décalage :

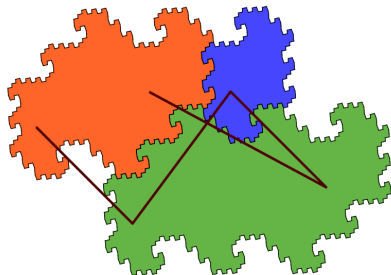
$$\dots 213\underline{12}12112 \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Propriétés : dynamique de σ , suite

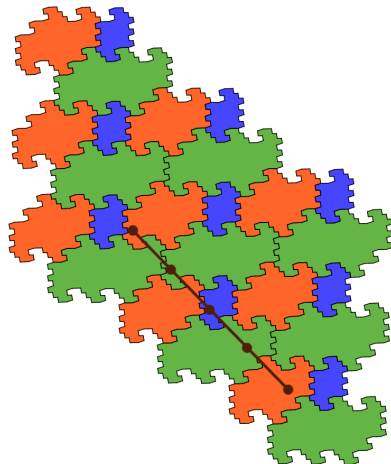
Échange de morceaux :



Décalage :

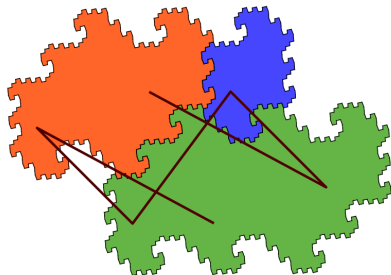
$$\dots 2131212112 \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Propriétés : dynamique de σ , suite

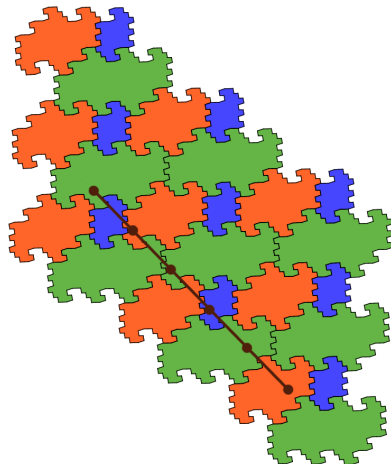
Échange de morceaux :



Décalage :

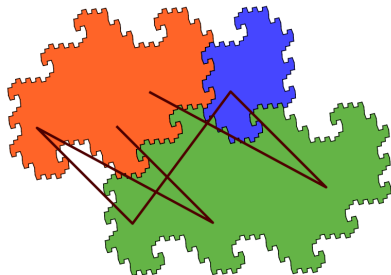
$$\dots 2131212112 \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Propriétés : dynamique de σ , suite

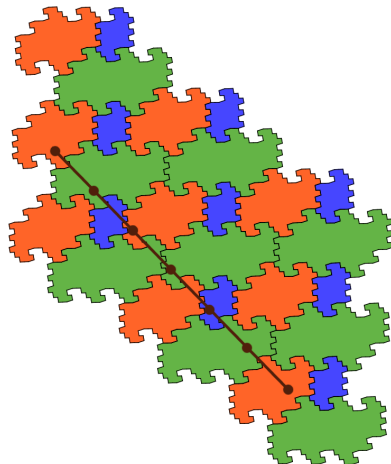
Échange de morceaux :



Décalage :

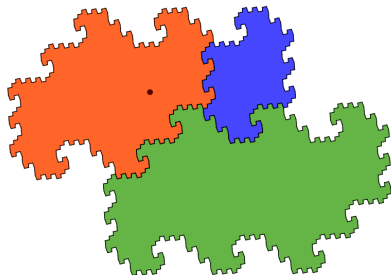
$$\dots 2131212\underline{112} \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Propriétés : dynamique de σ , suite

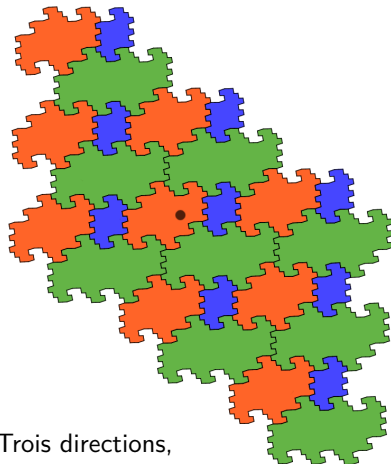
Échange de morceaux :



Décalage :

$$\dots \underline{2}131212112 \dots \in X_\sigma$$

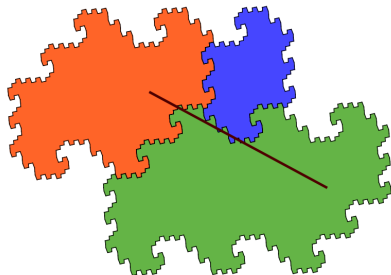
Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Trois directions,
même translation

Propriétés : dynamique de σ , suite

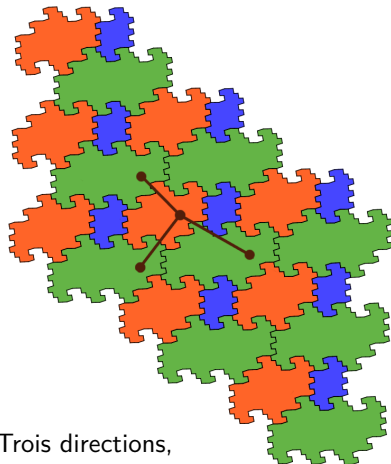
Échange de morceaux :



Décalage :

$$\dots \underline{2}1\underline{3}1212112 \dots \in X_\sigma$$

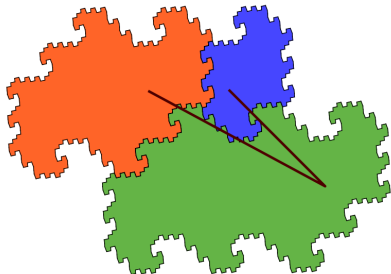
Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Trois directions,
même translation

Propriétés : dynamique de σ , suite

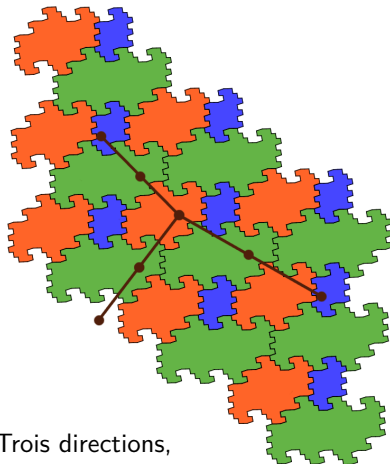
Échange de morceaux :



Décalage :

$$\dots \textcolor{red}{2}\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{3}\textcolor{red}{1}\textcolor{green}{2}\textcolor{red}{1}\textcolor{green}{2} \dots \in X_\sigma$$

Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$:



Trois directions,
même translation

Propriétés : dynamique de σ , résumé

$$\blacktriangleright \left(X_\sigma, \text{décalage} \right) \cong \left(\text{fractal}, \text{échange} \right) \cong \left(\mathbb{T}^2, \text{translation} \right)$$

Propriétés : dynamique de σ , résumé

► $(X_\sigma, \text{décalage}) \cong (\text{image fractale}, \text{échange}) \cong (\mathbb{T}^2, \text{translation})$

➡ Autre exemple de codage symbolique (par la partition )

Propriétés : dynamique de σ , résumé

► $(X_\sigma, \text{décalage}) \cong (\text{image fractale}, \text{échange}) \cong (\mathbb{T}^2, \text{translation})$

- ➡ Autre exemple de codage symbolique (par la partition )
- ➡ Partition **pas de markov** car X_σ n'est pas de type fini, (mais quand même utile)

Propriétés : dynamique de σ , résumé

- ▶ $(X_\sigma, \text{décalage}) \cong (\text{fractal}, \text{échange}) \cong (\mathbb{T}^2, \text{translation})$
 - ➡ Autre exemple de codage symbolique (par la partition )
 - ➡ Partition **pas de markov** car X_σ n'est pas de type fini, (mais quand même utile)
 - ➡ Construction valable pour toutes les substitutions Pisot irréductibles (**conjecture Pisot**)

Propriétés : dynamique de σ , résumé

- ▶ $(X_\sigma, \text{décalage}) \cong (\text{image d'un arbre}, \text{échange}) \cong (\mathbb{T}^2, \text{translation})$
 - ➡ Autre exemple de codage symbolique (par la partition )
 - ➡ Partition **pas de markov** car X_σ n'est pas de type fini, (mais quand même utile)
 - ➡ Construction valable pour toutes les substitutions Pisot irréductibles ([conjecture Pisot](#))
- ▶ **Fin de l'interlude :**
revenons à l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{T}^3$

Propriétés : dynamique de σ , résumé

- ▶ $(X_\sigma, \text{décalage}) \cong (\text{image d'un arbre fractal}, \text{échange}) \cong (\mathbb{T}^2, \text{translation})$
 - ➡ Autre exemple de codage symbolique (par la partition )
 - ➡ Partition **pas de markov** car X_σ n'est pas de type fini, (mais quand même utile)
 - ➡ Construction valable pour toutes les substitutions Pisot irréductibles (**conjecture Pisot**)
- ▶ **Fin de l'interlude :**
revenons à l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{T}^3$
- ▶ On construit maintenant une **partition de Markov** pour $(\mathbb{T}^3, M_\sigma)$



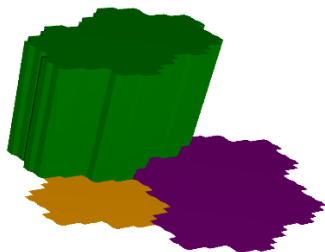
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le fractal de Rauzy dans le plan contractant



Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**



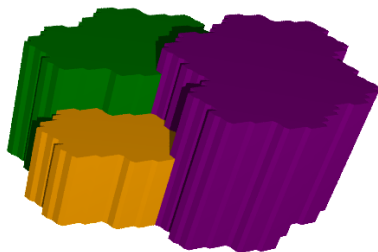
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**



Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**



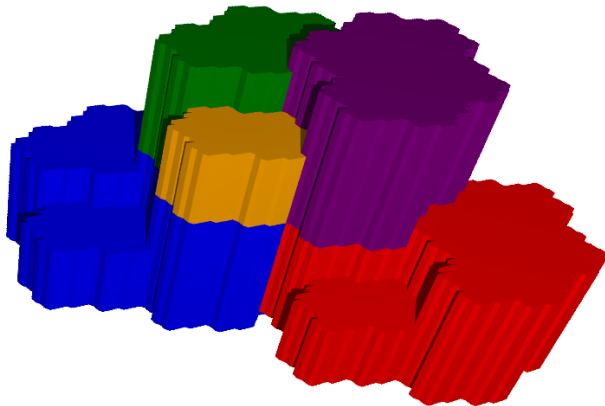
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**
3. Ça pave périodiquement ! — Domaine fondamental de $\mathbb{T}^3$



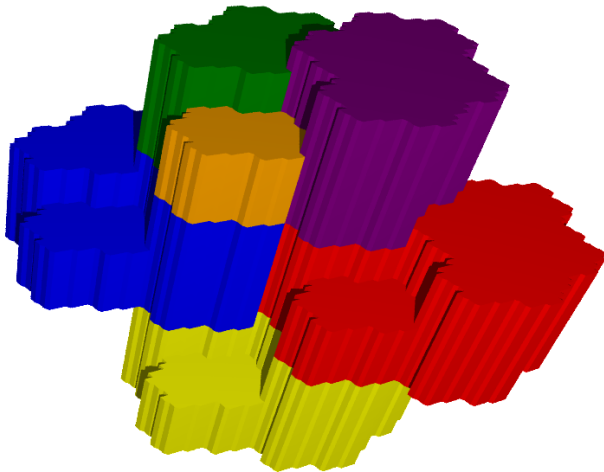
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**
3. Ça pave périodiquement ! — Domaine fondamental de $\mathbb{T}^3$



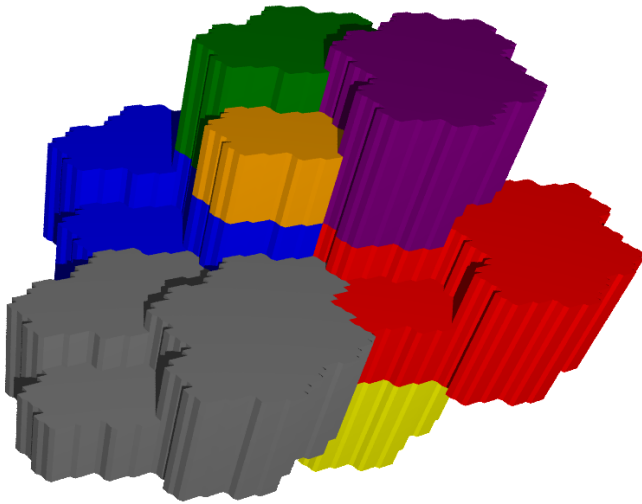
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**
3. Ça pave périodiquement ! — Domaine fondamental de $\mathbb{T}^3$



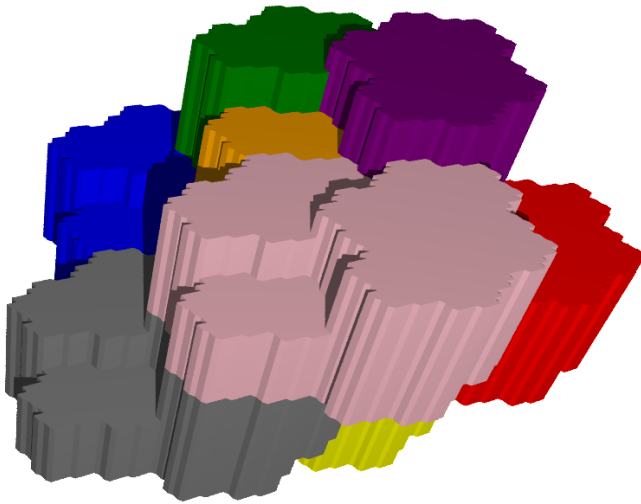
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**
3. Ça pave périodiquement ! — Domaine fondamental de $\mathbb{T}^3$



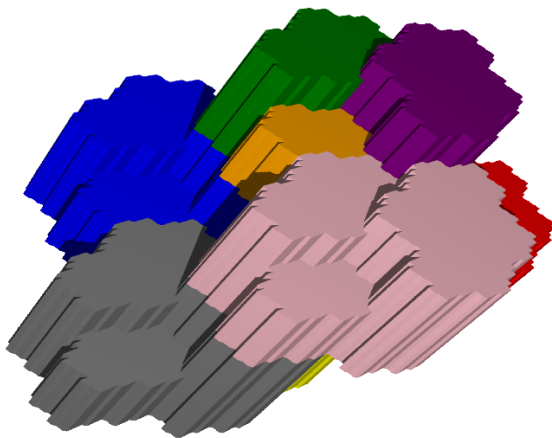
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**
3. Ça pave périodiquement ! — Domaine fondamental de $\mathbb{T}^3$



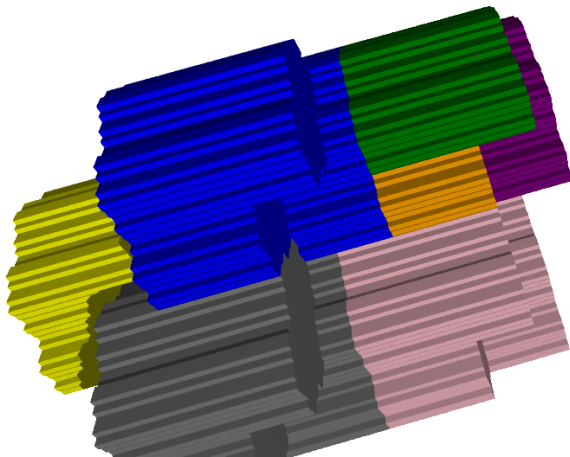
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**
3. Ça pave périodiquement ! — Domaine fondamental de $\mathbb{T}^3$



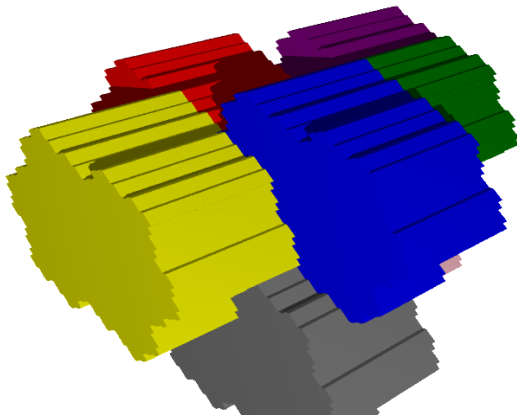
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**
3. Ça pave périodiquement ! — Domaine fondamental de $\mathbb{T}^3$



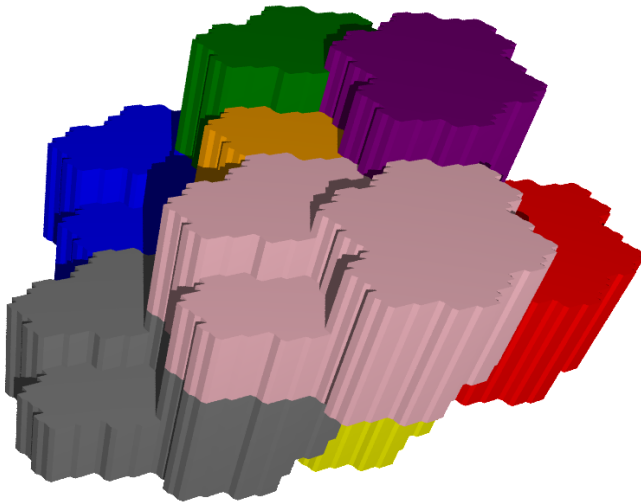
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**
3. Ça pave périodiquement ! — Domaine fondamental de $\mathbb{T}^3$



Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

1. On prend le **fractal de Rauzy** dans le **plan contractant**
2. On “soulève” chaque pièce selon la **direction dilatante**
3. Ça pave périodiquement ! — Domaine fondamental de $\mathbb{T}^3$



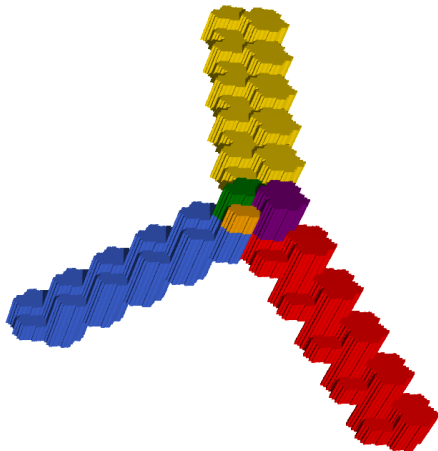
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

Cela pave bien selon un $\mathbb{Z}^3$ -réseau :



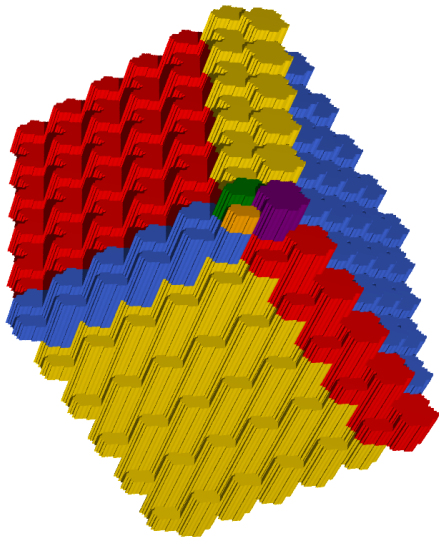
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

Cela pave bien selon un $\mathbb{Z}^3$ -réseau :



Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

Cela pave bien selon un $\mathbb{Z}^3$ -réseau :



Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

- ▶ On code les orbites de $\mathbf{M}_\sigma$ selon la partition $\mathcal{P} =$



Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

- ▶ On code les orbites de M_σ selon la partition $\mathcal{P} =$



- ▶ On obtient le système $(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$
avec $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\text{suites ne contenant pas } 22, 23, 31, 33\}$ (c.f. M_σ)

Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

- ▶ On code les orbites de M_σ selon la partition $\mathcal{P} =$



- ▶ On obtient le système $(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$
avec $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\text{suites ne contenant pas } 22, 23, 31, 33\}$ (c.f. M_σ)
- ▶ C'est un sous-shift de type fini :
on a une partition de Markov explicite pour $(\mathbb{T}^3, M_\sigma)$

Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

- ▶ On code les orbites de $\mathbf{M}_\sigma$ selon la partition $\mathcal{P} =$



- ▶ On obtient le système $(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$
avec $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\text{suites ne contenant pas } 22, 23, 31, 33\}$ (c.f. $\mathbf{M}_\sigma$)
- ▶ C'est un sous-shift de type fini :
on a une partition de Markov explicite pour $(\mathbb{T}^3, \mathbf{M}_\sigma)$
- ▶ Construction généralisable à toute σ Pisot irréductible,
si la conjecture Pisot est vraie

Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

- ▶ On code les orbites de M_σ selon la partition $\mathcal{P} =$



- ▶ On obtient le système $(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$
avec $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\text{suites ne contenant pas } 22, 23, 31, 33\}$ (c.f. M_σ)
- ▶ C'est un sous-shift de type fini :
on a une partition de Markov explicite pour $(\mathbb{T}^3, M_\sigma)$
- ▶ Construction généralisable à toute σ Pisot irréductible,
si la conjecture Pisot est vraie
- ▶ **Conclusion :**
 - ▶ M matrice d'une substitution Pisot irréductible
 $\implies$ construction explicite (modulo la conjecture)
[Siegel 2001, Ito-Rao 2006]
 - ▶ M hyperbolique mais pas Pisot
 $\implies$ constructions explicites dans certains cas
(par exemple [Arnoux-Furukado-Harriss-Ito 2001])

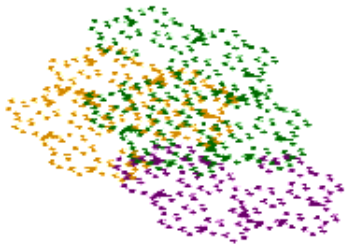
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

- ▶ On code les orbites de M_σ selon la partition $\mathcal{P} =$ 
- ▶ On obtient le système $(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$
avec $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\text{suites ne contenant pas } 22, 23, 31, 33\}$ (c.f. M_σ)
- ▶ C'est un sous-shift de type fini :
on a une partition de Markov explicite pour $(\mathbb{T}^3, M_\sigma)$
- ▶ Construction généralisable à toute σ Pisot irréductible,
si la conjecture Pisot est vraie
- ▶ **Conclusion :**
 - ▶ M matrice d'une substitution Pisot irréductible
 $\implies$ construction explicite (modulo la conjecture)
[Siegel 2001, Ito-Rao 2006]
 - ▶ M hyperbolique mais pas Pisot
 $\implies$ constructions explicites dans certains cas
(par exemple [Arnoux-Furukado-Harriss-Ito 2001])
 - ▶ La conjecture est facilement vérifiable pour une substitution.

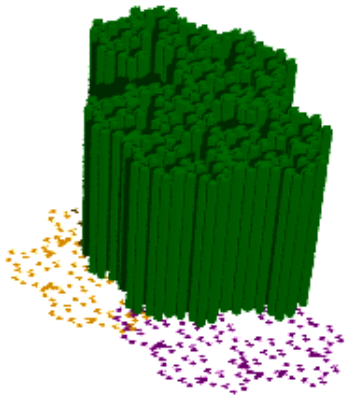
Partition de Markov pour $(\mathbb{T}^3, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

- ▶ On code les orbites de M_σ selon la partition $\mathcal{P} =$ 
- ▶ On obtient le système $(\Sigma_{\mathcal{P}}, \text{décalage})$
avec $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\text{suites ne contenant pas } 22, 23, 31, 33\}$ (c.f. M_σ)
- ▶ C'est un sous-shift de type fini :
on a une partition de Markov explicite pour $(\mathbb{T}^3, M_\sigma)$
- ▶ Construction généralisable à toute σ Pisot irréductible,
si la conjecture Pisot est vraie
- ▶ **Conclusion :**
 - ▶ M matrice d'une substitution Pisot irréductible
 $\implies$ construction explicite (modulo la conjecture)
[Siegel 2001, Ito-Rao 2006]
 - ▶ M hyperbolique mais pas Pisot
 $\implies$ constructions explicites dans certains cas
(par exemple [Arnoux-Furukado-Harriss-Ito 2001])
 - ▶ La conjecture est facilement vérifiable pour une substitution.
 - ▶ Elle a été prouvée pour certaines familles infinies.
[Ito-Ohtsuki 1993, Berthé-J-Siegel 2011]

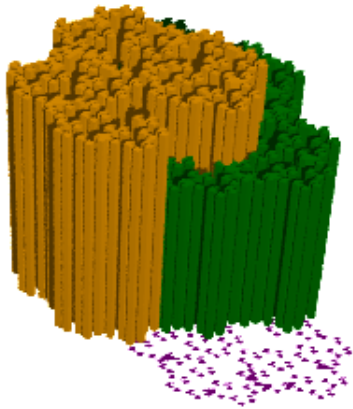
$$\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 12$$



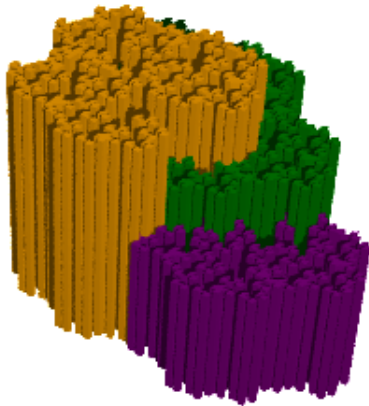
$$\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 12$$



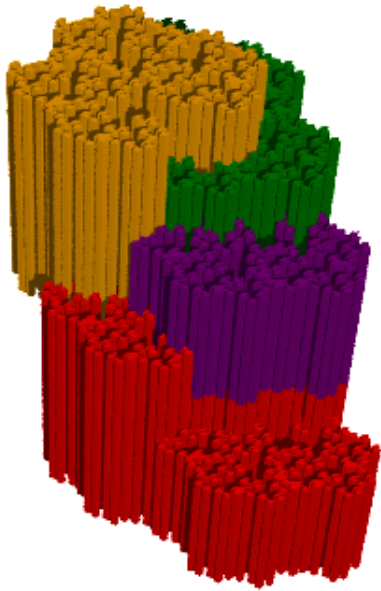
$$\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 12$$



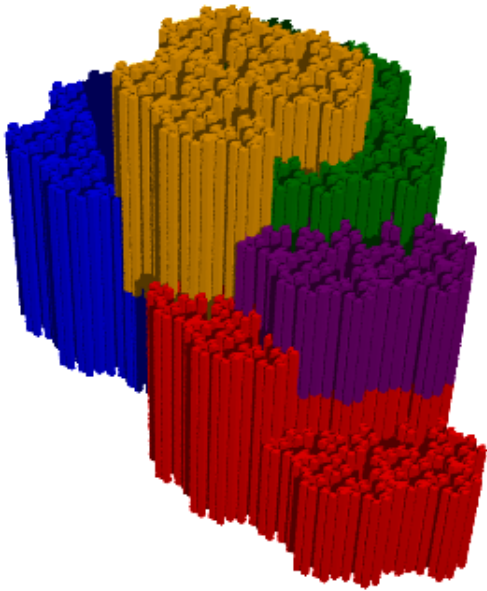
$$\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 12$$



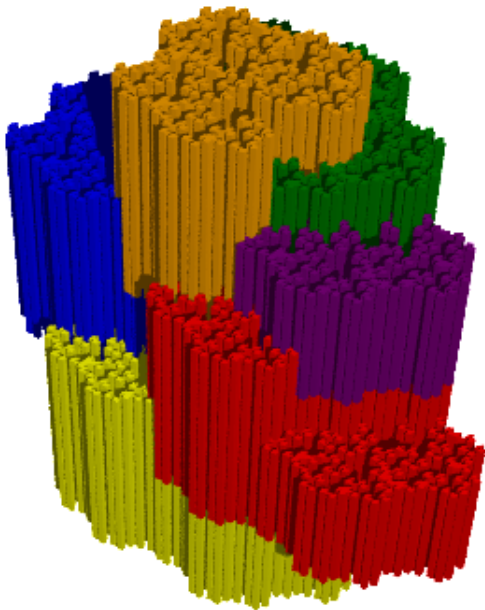
$$\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 12$$



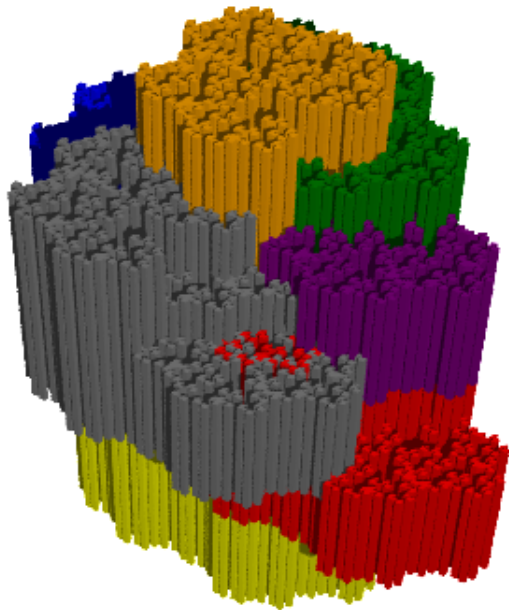
$$\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 12$$



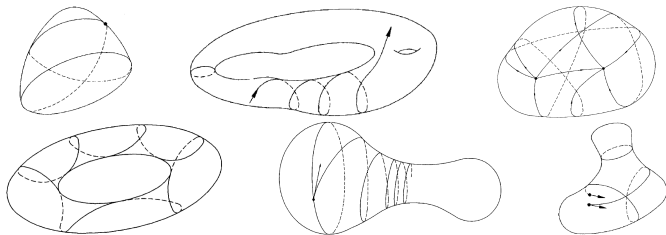
$$\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 12$$



$$\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 12$$



Merci de votre attention



-  **Le logiciel Sage**, www.sagemath.org
Utilisé ici pour les figures ; un logiciel “à la Mathematica” gratuit.
-  **R. L. Adler**, *Symbolic Dynamics and Markov Partitions*,
Bulletin of the AMS, 1998. Pour les automorphismes de $\mathbb{T}^2$.
-  **Anne Siegel**, HDR (en ligne). Pour $\mathbb{T}^d$, $d \geq 3$.