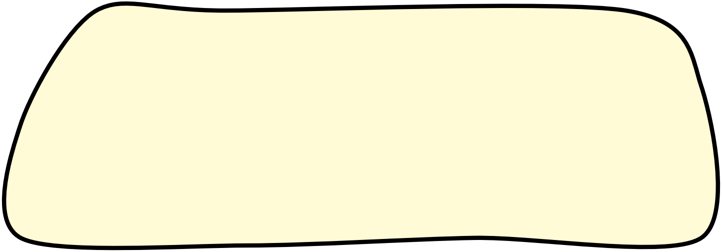
Systèmes dynamiques et combinatoire : exemples

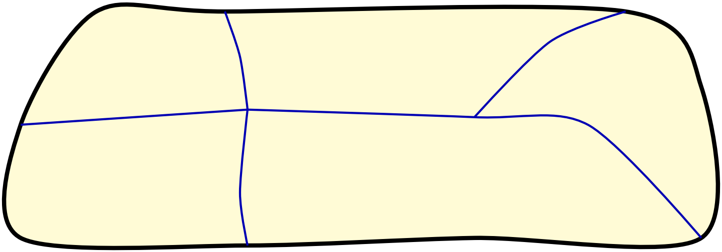
Timo Jolivet
FUNDIM, Université de Turku, Finlande
LIAFA, Université Paris 7, France

École Jeunes Chercheurs
1er avril 2011, Amiens

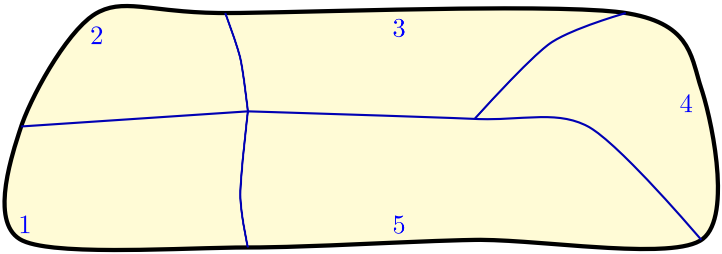
Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



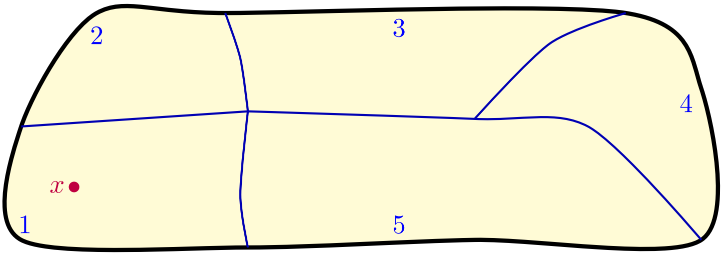
Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$

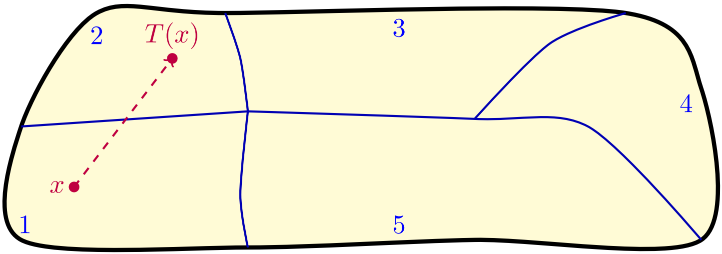


Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



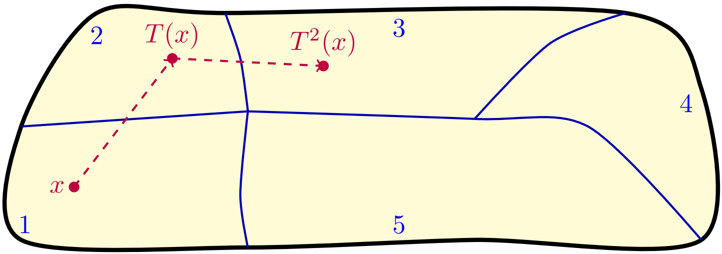
Codage de x : 1

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



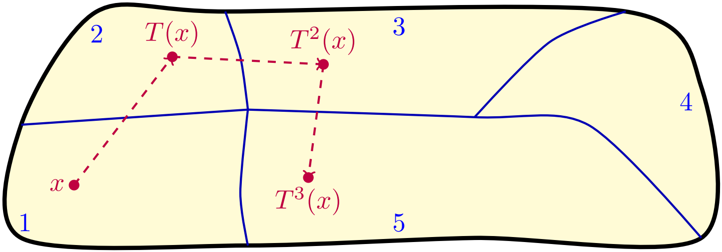
Codage de x : $1\ 2$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



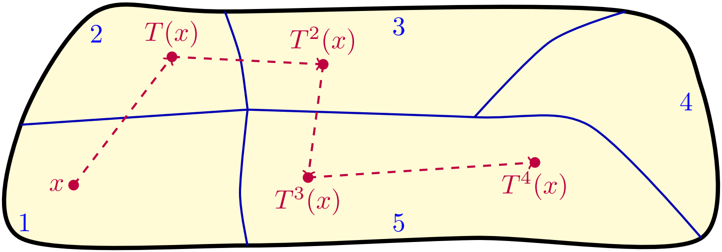
Codage de x : $1\ 2\ 3$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



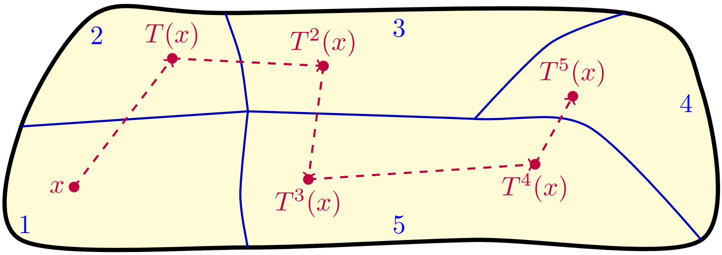
Codage de x : $1\ 2\ 3\ 5$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



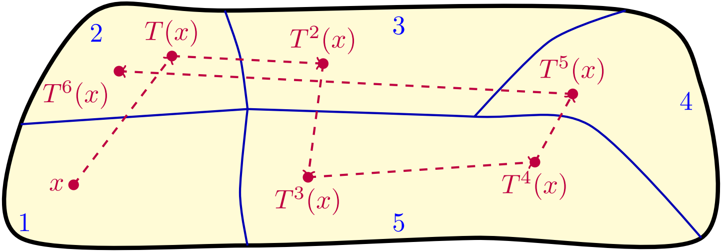
Codage de x : $1\ 2\ 3\ 5\ 5$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



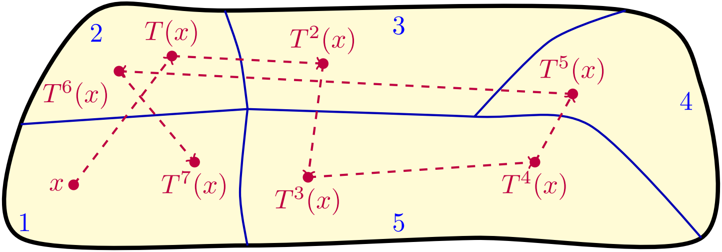
Codage de x : $1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



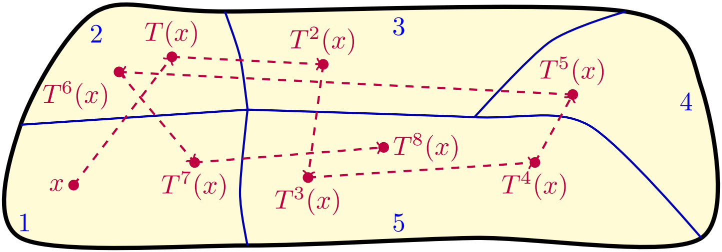
Codage de x : $1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4\ 2$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



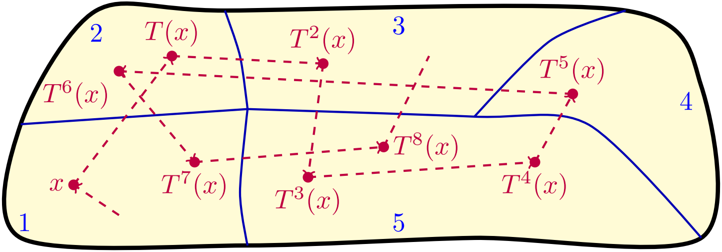
Codage de x : $1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4\ 2\ 1$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



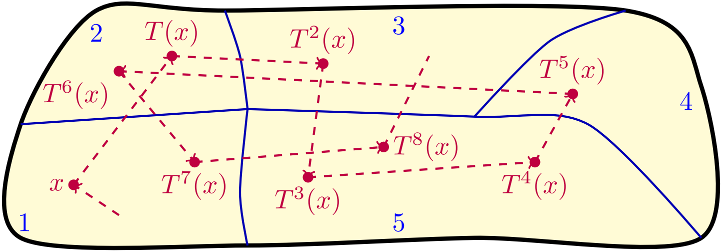
Codage de x : $1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



Codage de x : $\cdots$ 1 2 3 5 5 4 2 1 5 $\cdots$ $\in \{1,2,3,4,5\}^{\mathbb{Z}}$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$



Codage de x : $\cdots\ 1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5\ \cdots \in \{1,2,3,4,5\}^{\mathbb{Z}}$

Partition (topologique) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

➥ Codage de $x \in X$: suite $(x_n) \in \{1,2,3,4,5\}^{\mathbb{Z}}$

➥ Ensemble de tous les codages : $\Sigma_{\mathcal{P}} \subseteq \{1,2,3,4,5\}^{\mathbb{Z}}$

$\mathcal{P}$ donne-t-elle une bonne représentation de (X,T) ?

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$

- **On veut :** À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$

- **On veut :** À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
- **Ça veut dire :**

$$\begin{array}{rcl} & \cdots & \\ T^{-1}(x) & \in & P_{x_{-1}} \\ x & \in & P_{x_0} \\ T(x) & \in & P_{x_1} \\ T^2(x) & \in & P_{x_2} \\ & \cdots & \end{array}$$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$

- **On veut :** À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
- **Ça veut dire :**

$$\begin{array}{rcl} & \cdots & \\ T^{-1}(x) & \in & P_{x_{-1}} \\ x & \in & P_{x_0} \\ T(x) & \in & P_{x_1} \\ T^2(x) & \in & P_{x_2} \\ & \cdots & \end{array} \iff \begin{array}{rcl} & \cdots & \\ x & \in & T(P_{x_{-1}}) \\ x & \in & P_{x_0} \\ x & \in & T^{-1}(P_{x_1}) \\ x & \in & T^{-2}(P_{x_2}) \\ & \cdots & \end{array}$$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$

- **On veut :** À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'<u>un seul</u> $x \in X$.
- **Ça veut dire :**

$$\begin{array}{rcl} & \cdots & \\ T^{-1}(x) & \in & P_{x_{-1}} \\ x & \in & P_{x_0} \\ T(x) & \in & P_{x_1} \\ T^2(x) & \in & P_{x_2} \\ & \cdots & \end{array} \iff \begin{array}{rcl} & \cdots & \\ x & \in & T(P_{x_{-1}}) \\ x & \in & P_{x_0} \\ x & \in & T^{-1}(P_{x_1}) \\ x & \in & T^{-2}(P_{x_2}) \\ & \cdots & \end{array} \iff x \in \underbrace{\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}(P_{x_n})}_{=\ \{x\}}$$

Idée : **coder** les orbites du système dynamique $T : X \to X$

- **On veut :** À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
- **Ça veut dire :**

$$
\begin{array}{rcl}
 & \cdots & \\
T^{-1}(x) & \in & P_{x_{-1}} \\
x & \in & P_{x_0} \\
T(x) & \in & P_{x_1} \\
T^2(x) & \in & P_{x_2} \\
 & \cdots &
\end{array}
\iff
\begin{array}{rcl}
 & \cdots & \\
x & \in & T(P_{x_{-1}}) \\
x & \in & P_{x_0} \\
x & \in & T^{-1}(P_{x_1}) \\
x & \in & T^{-2}(P_{x_2}) \\
 & \cdots &
\end{array}
\iff x \in \underbrace{\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}(P_{x_n})}_{=\ \{x\}}
$$

- **On a alors :** une **représentation symbolique** de (X, T) par $\mathcal{P}$:

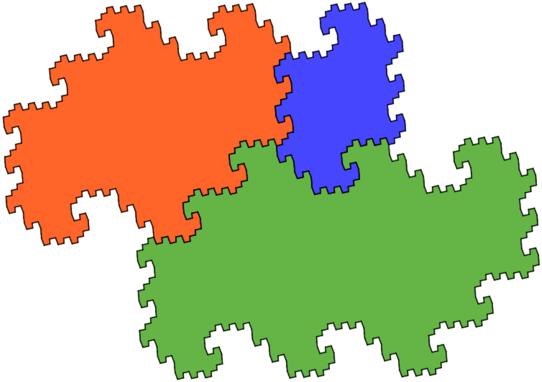
$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_{\mathcal{P}} \arrow[r, "\text{décalage}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Sigma_{\mathcal{P}} \arrow[d, "\varphi"] \\
X \arrow[r, "T"'] & X
\end{tikzcd}
$$

$\varphi : (x_n) \mapsto$ l'unique $x \in \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}(P_{x_n})$

φ continue et surjective
(et pas forcément injective,
mais c'est pas très grave)

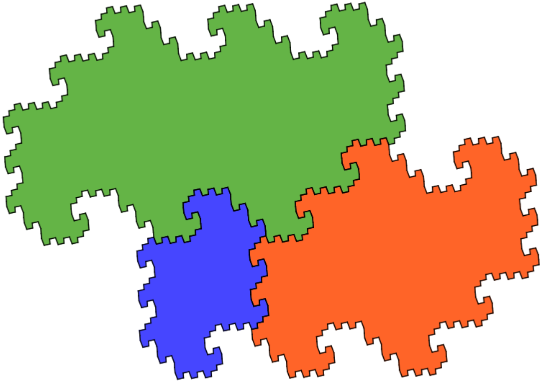
Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$



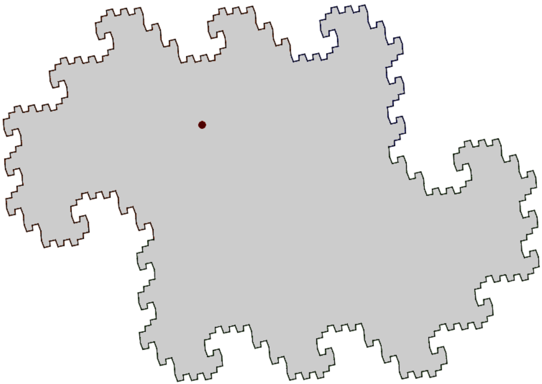
Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$



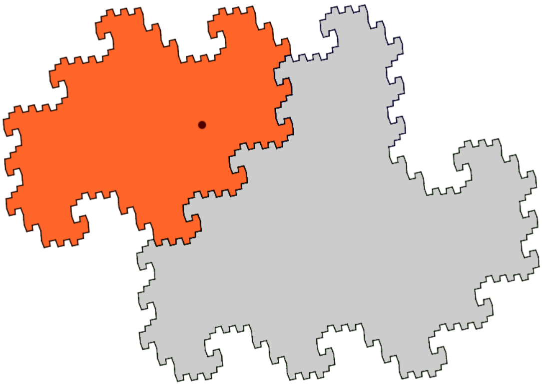
Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$



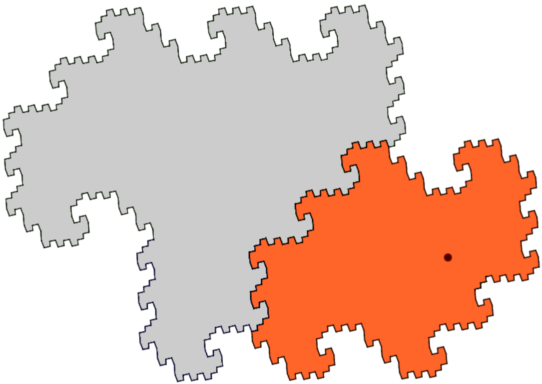
Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$



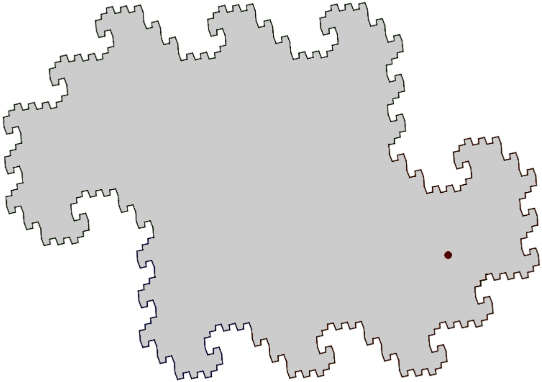
Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$



Exemple 1 (juste pour les images) :

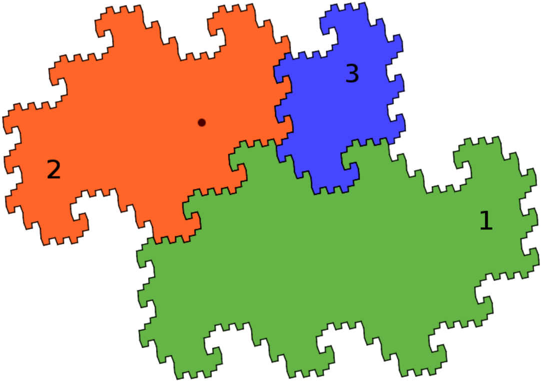
$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

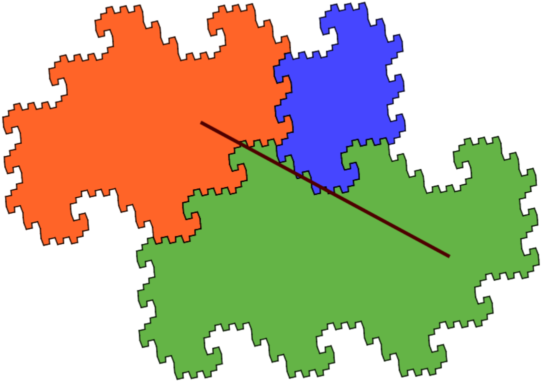
Orbite : 2



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

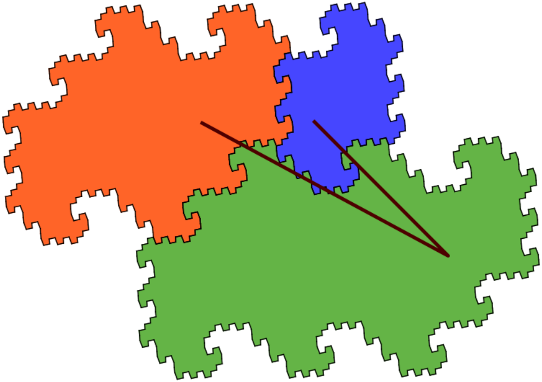
Orbite : 21



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

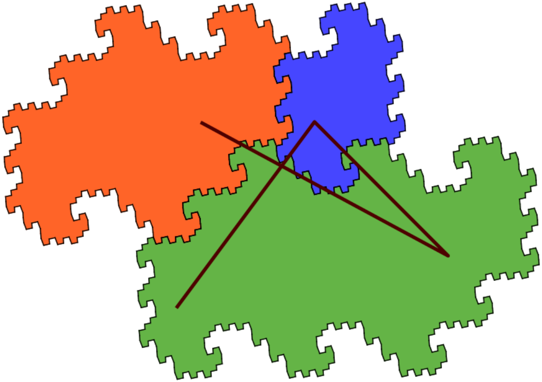
Orbite : 213



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

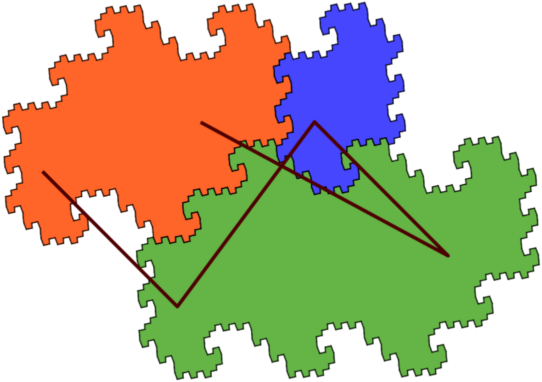
Orbite : 2131



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

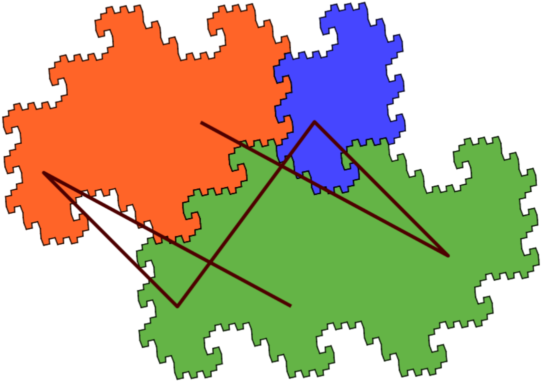
Orbite : 21312



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

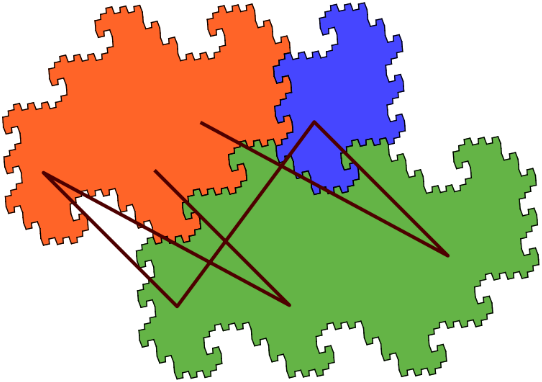
Orbite : 213121



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

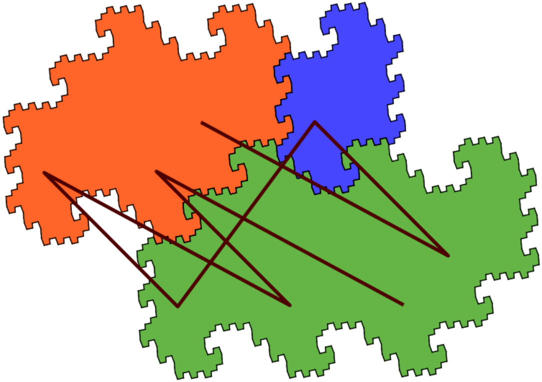
Orbite : 2131212



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

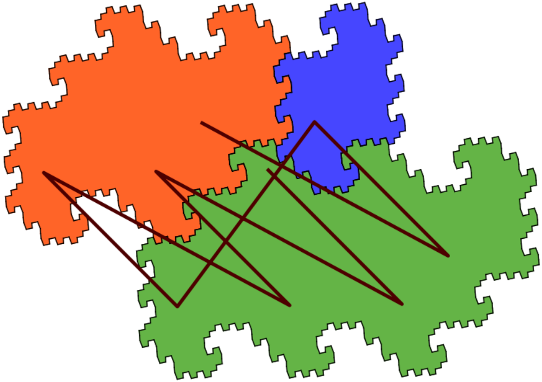
Orbite : 21312121



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

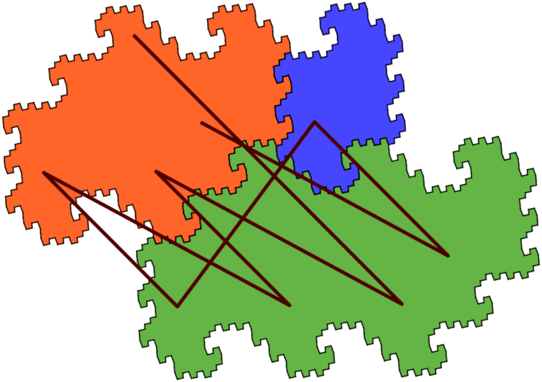
Orbite : 213121211



Exemple 1 (juste pour les images) :

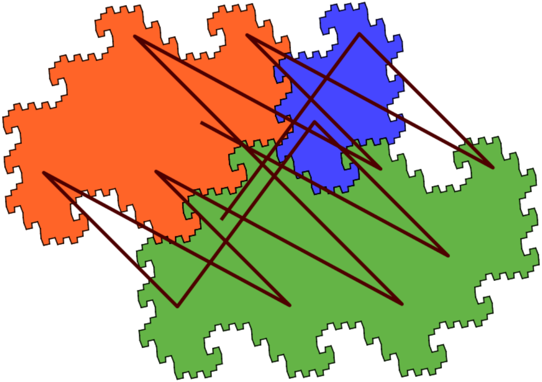
$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

Orbite : 2131212112



Exemple 1 (juste pour les images) :
$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

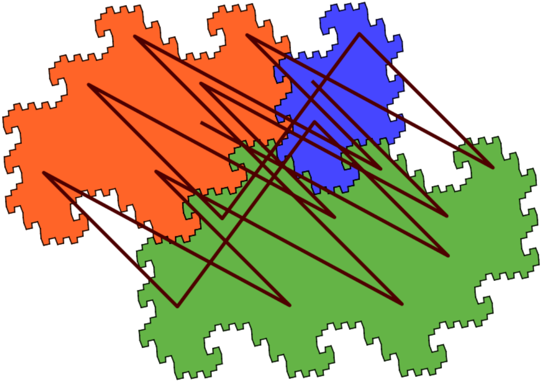
Orbite : 213121211212131



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

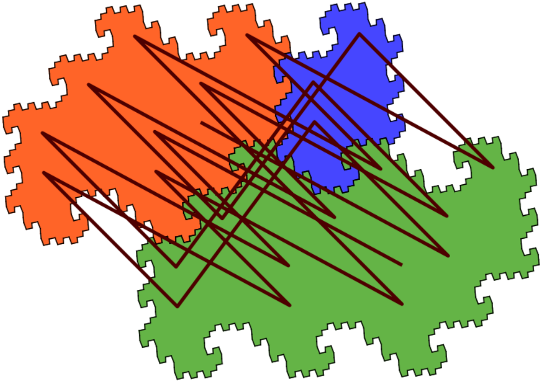
Orbite : 2131212112121312121213



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

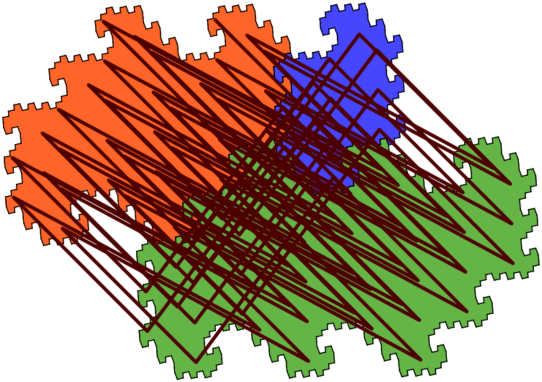
Orbite : 21312121121213121213121 21



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

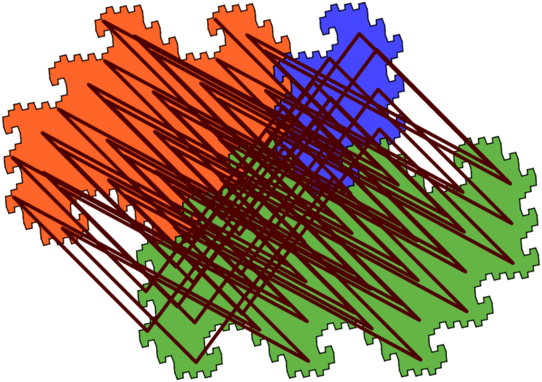
Orbite : $\cdots 2131212112121312121312121 \cdots \in \Sigma_{\mathcal{P}} \subseteq \{1,2,3\}^{\mathbb{Z}}$



Exemple 1 (juste pour les images) :

$1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1312, 3 \mapsto 112$

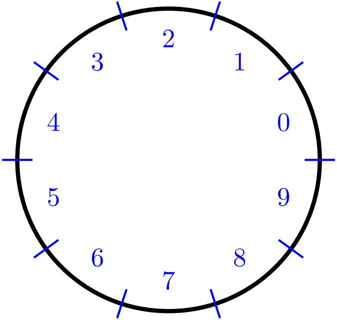
Orbite : $\cdots 2131212112121312121312121 \cdots \in \Sigma_{\mathcal{P}} \subseteq \{1,2,3\}^{\mathbb{Z}}$



$\left(\Sigma_{\mathcal{P}}\right.$, décalage d'une lettre$\left.\right)$ $\cong$ $\left(\right.$, échange de morceaux$\left.\right)$

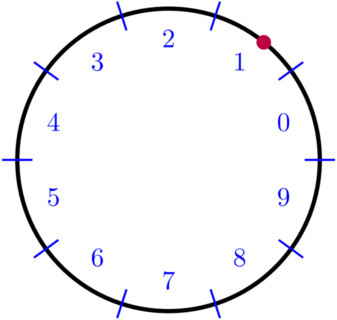
Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0, 1]$

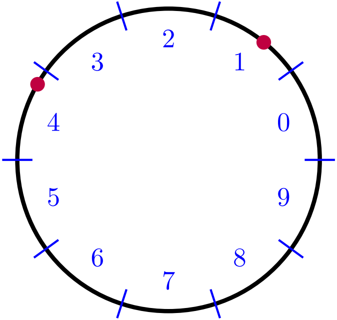
$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.1

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0, 1]$

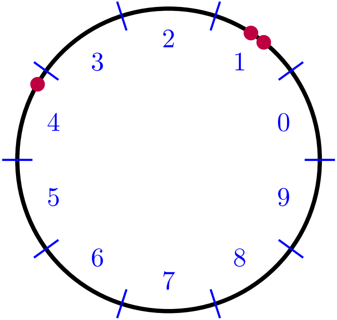
$$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \tfrac{i}{10}, \tfrac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$$



0.14

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

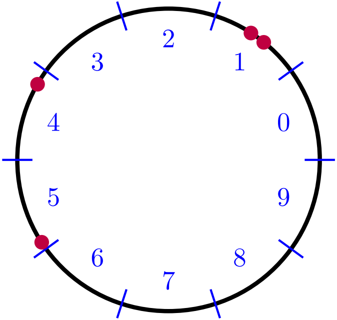
$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.141

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

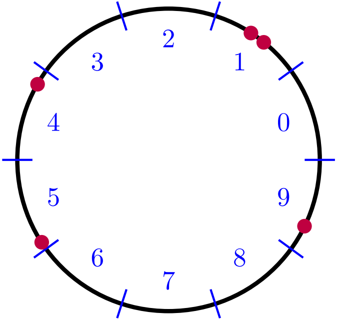
$X = [0,1]$ $\qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1$ $\qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.1415

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

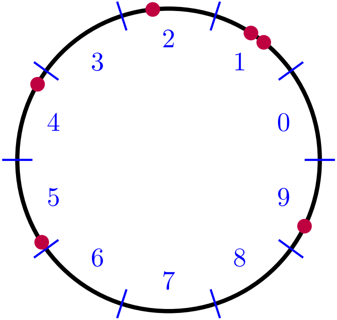
$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.14159

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0, 1]$

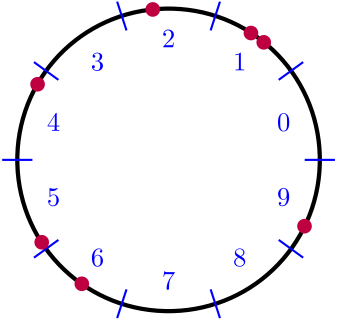
$X = [0, 1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.141592

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

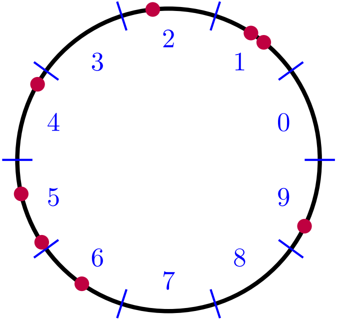
$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.1415926

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0, 1]$

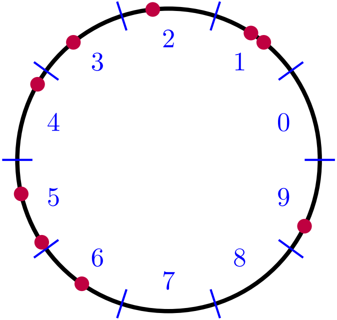
$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.14159265

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

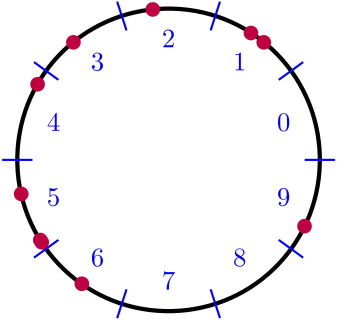
$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.141592653

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

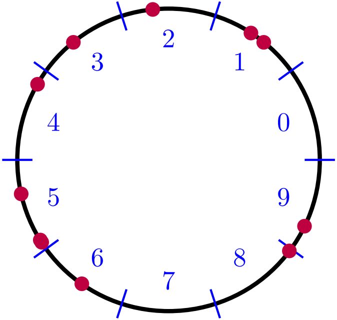
$X = [0,1]$ $\qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1$ $\qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.1415926535

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

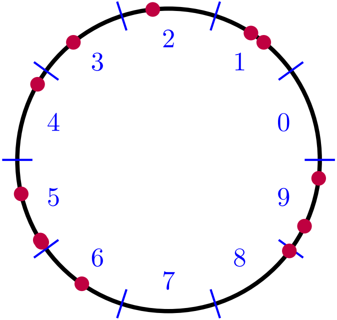
$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.14159265358

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

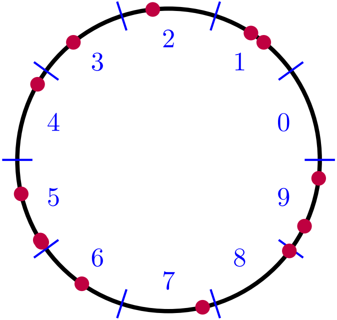
$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.141592653589

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

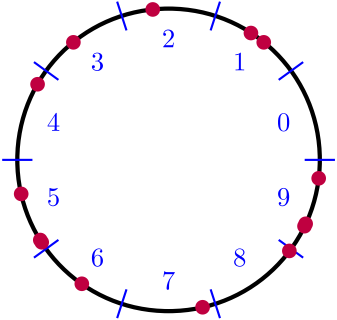
$X = [0,1] \qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1 \qquad \mathcal{P} = \left\{ \left]\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



0.1415926535897

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0, 1]$

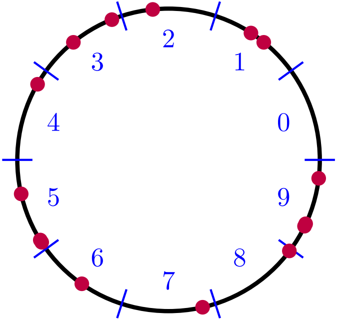
$X = [0,1]$ $\qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1$ $\qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



$0.1415926535897931 2 \cdots$

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

$X = [0,1]$ $\qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1$ $\qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



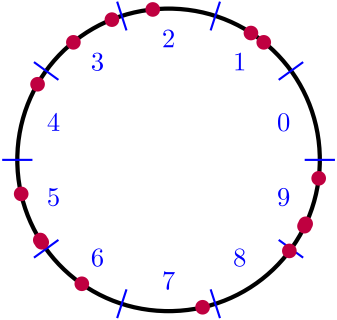
$\pi - 3 = 0.14159265358979312 \cdots$

Codages $\Longleftrightarrow$ expansions décimales

Codages valides : $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{0, \ldots, 9\}^{\mathbb{Z}}$

Exemple 2 (le plus simple) : multiplier par 10 sur $[0,1]$

$X = [0,1]$ $\qquad T : x \mapsto 10x \pmod 1$ $\qquad \mathcal{P} = \left\{ \left] \frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right[: 0 \leqslant i \leqslant 9 \right\}$



$\pi - 3 = 0.14159265358979312\cdots$

Codages $\Longleftrightarrow$ expansions décimales

Codages valides : $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{0, \ldots, 9\}^{\mathbb{Z}}$

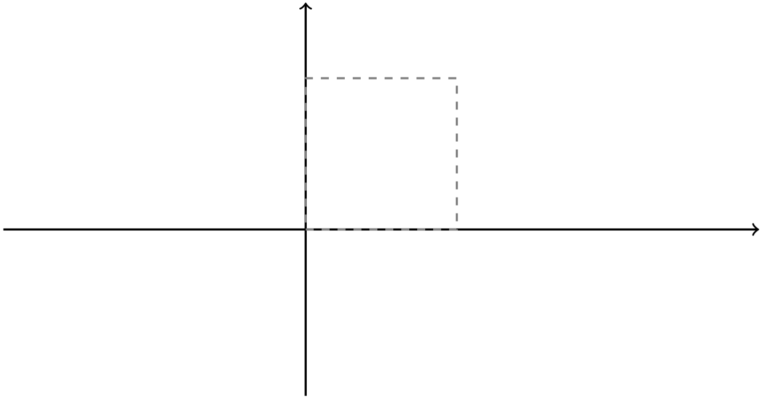
Le codage $\varphi : \Sigma_{\mathcal{P}} \to X$ n'est pas injectif :

$0.999\cdots = 1.000\cdots$ ou $0.46999\cdots = 0.47000\cdots$

(les nombres décimaux ont deux pré-images).

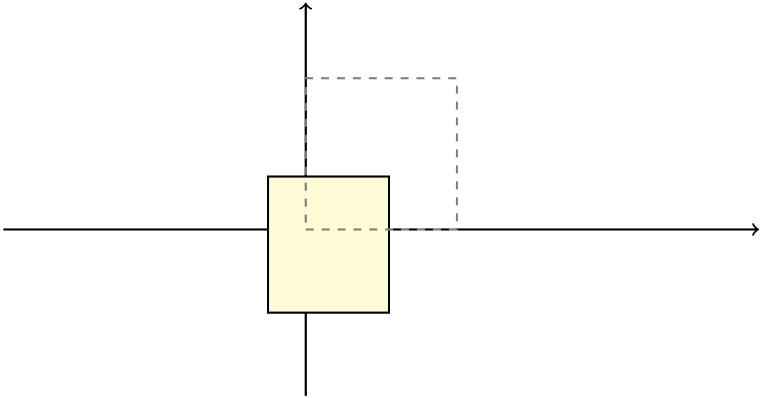
Exemple 3 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0,1]^2$

Système dynamique T : $\left\{ \begin{array}{ccc} [0,1]^2 & \to & [0,1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \pmod 1 \end{array} \right.$



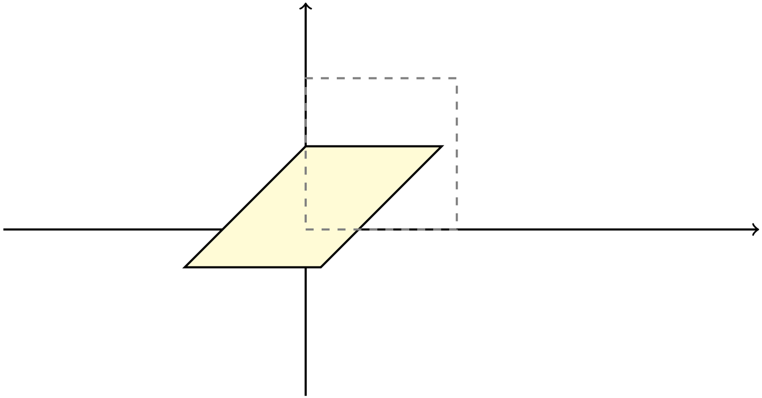
Exemple 3 (détaillé) : Multiplier par $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ sur $[0,1]^2$

Système dynamique T : $\left\{\begin{array}{ccccc} [0,1]^2 & \to & [0,1]^2 & & \\ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) & = & \left(\begin{smallmatrix}x+y\\x\end{smallmatrix}\right) \pmod 1 \end{array}\right.$



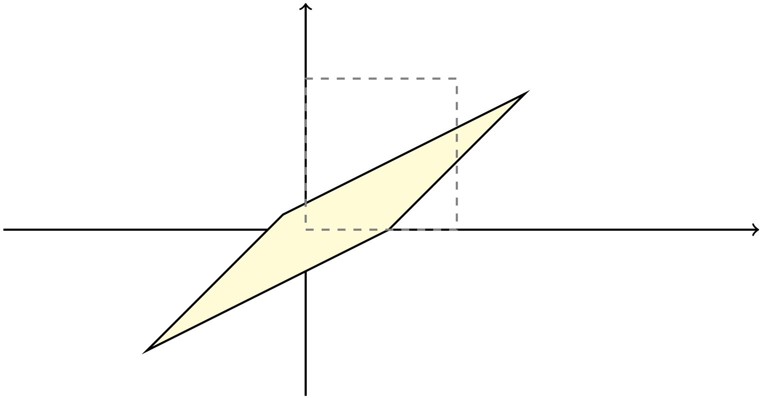
Exemple 3 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0,1]^2$

Système dynamique T : $\left\{ \begin{array}{ccl} [0,1]^2 & \to & [0,1]^2 \\ \binom{x}{y} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \binom{x+y}{x} \pmod 1 \end{array} \right.$



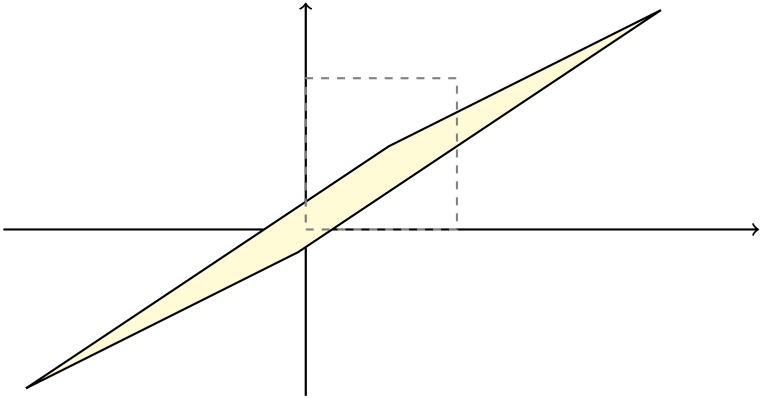
Exemple 3 (détaillé) : Multiplier par $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ sur $[0,1]^2$

Système dynamique T : $\left\{\begin{array}{ccc} [0,1]^2 & \to & [0,1]^2 \\ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}x+y\\x\end{smallmatrix}\right) \pmod 1 \end{array}\right.$



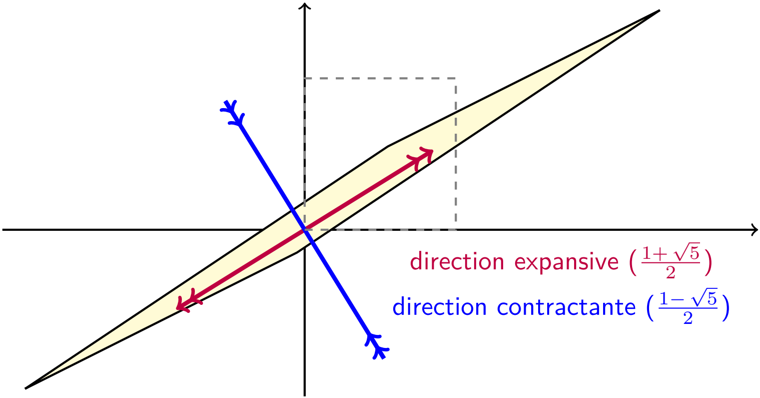
Exemple 3 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0,1]^2$

Système dynamique T : $\left\{ \begin{array}{ccl} [0,1]^2 & \to & [0,1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \pmod 1 \end{array} \right.$



Exemple 3 (détaillé) : Multiplier par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $[0,1]^2$

Système dynamique T : $\begin{cases} [0,1]^2 & \to & [0,1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \pmod 1 \end{cases}$



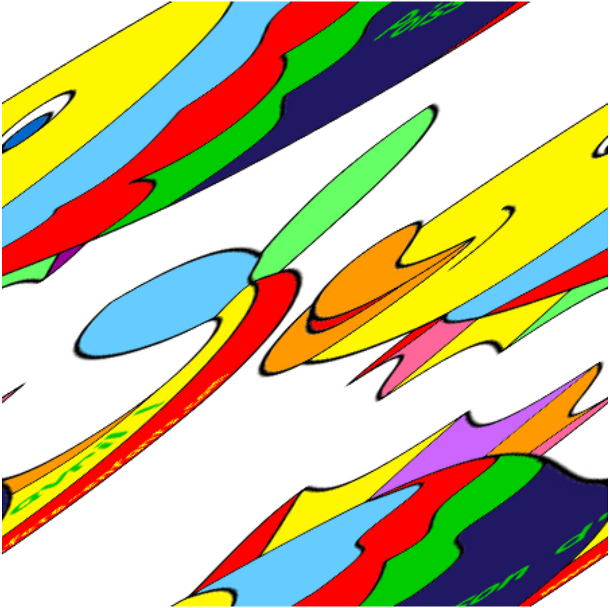
Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...

$n = 0$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ sur une image. . .

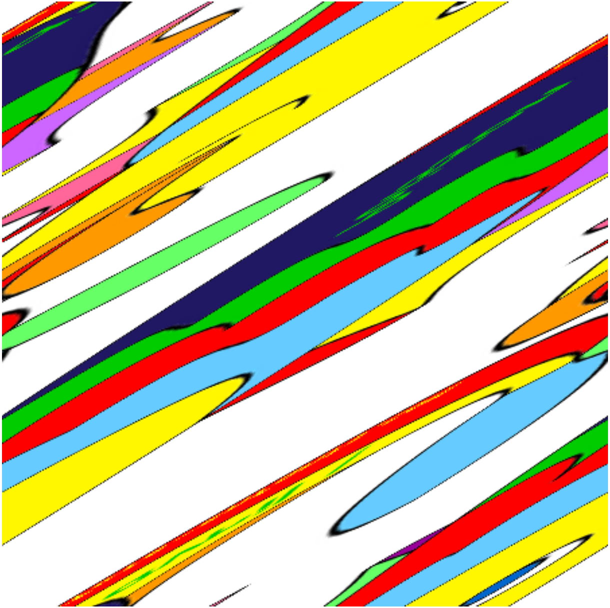
$n = 1$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image…



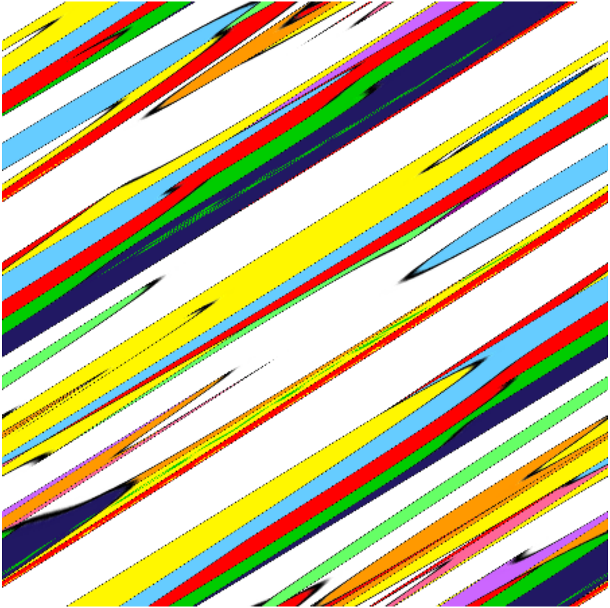
$n = 2$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



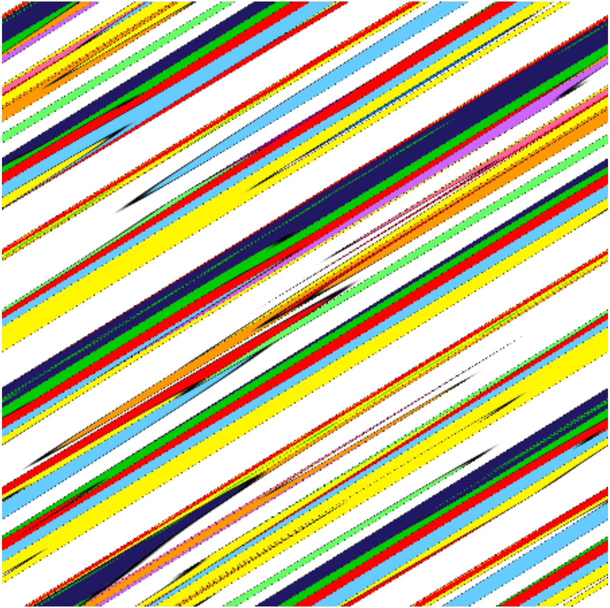
$n = 3$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image. . .



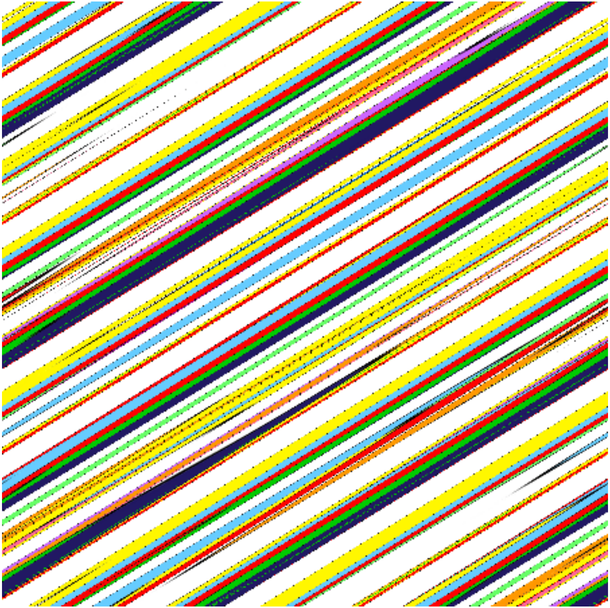
$n = 4$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



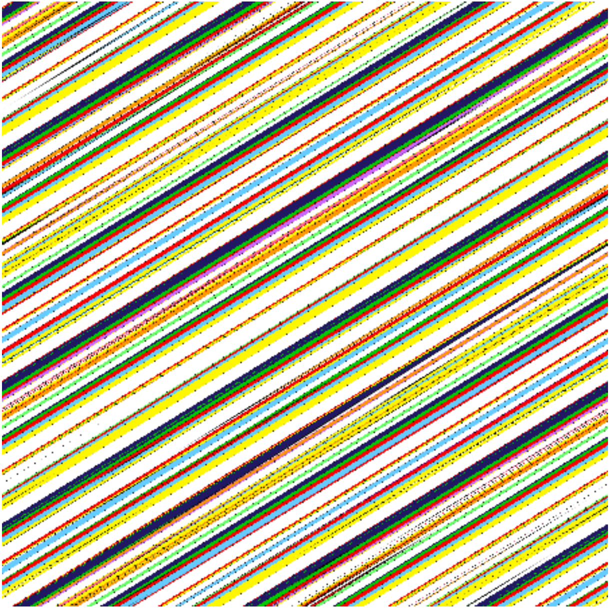
$n = 5$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



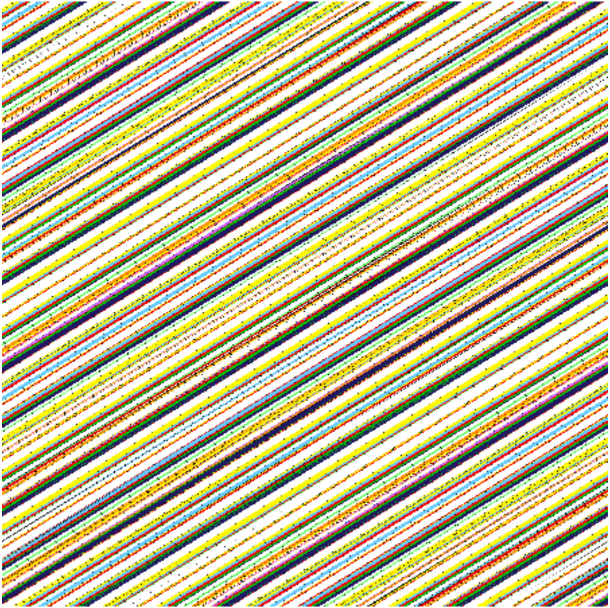
$n = 6$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



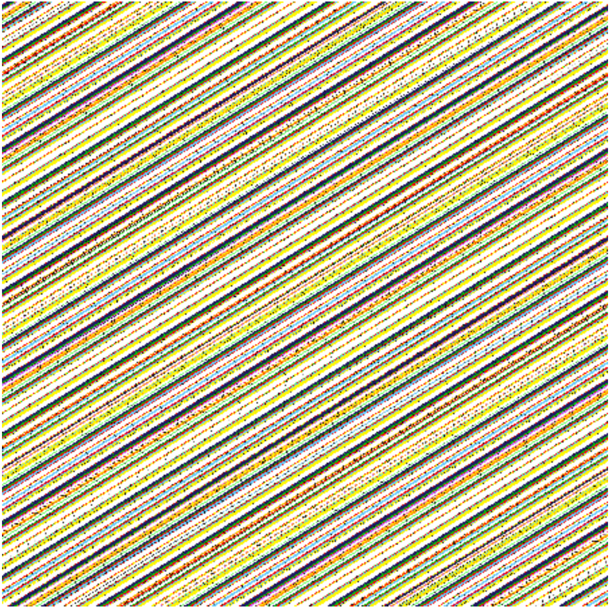
$n = 7$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



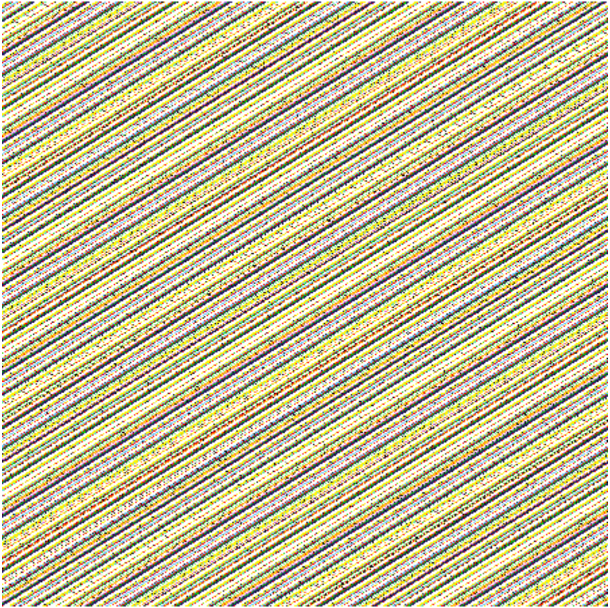
$n = 8$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ sur une image. . .



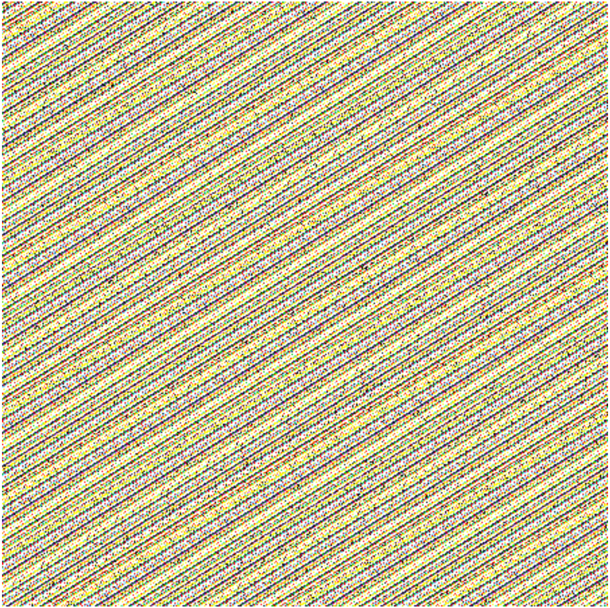
$n = 9$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image. . .



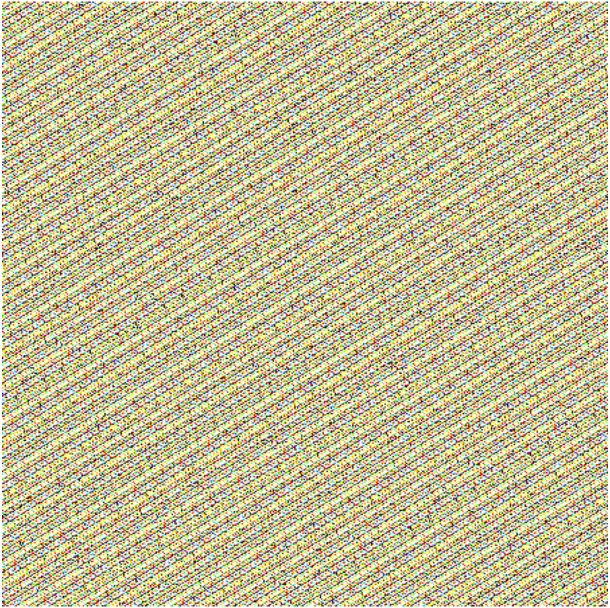
$n = 10$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ sur une image…



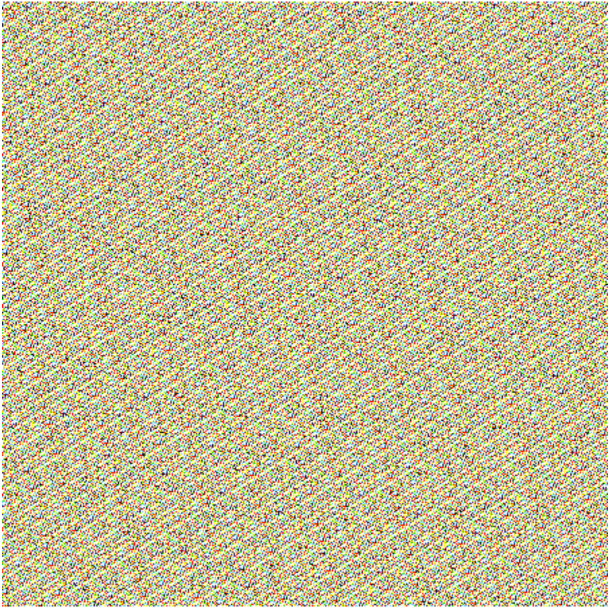
$n = 11$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



$n = 12$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...

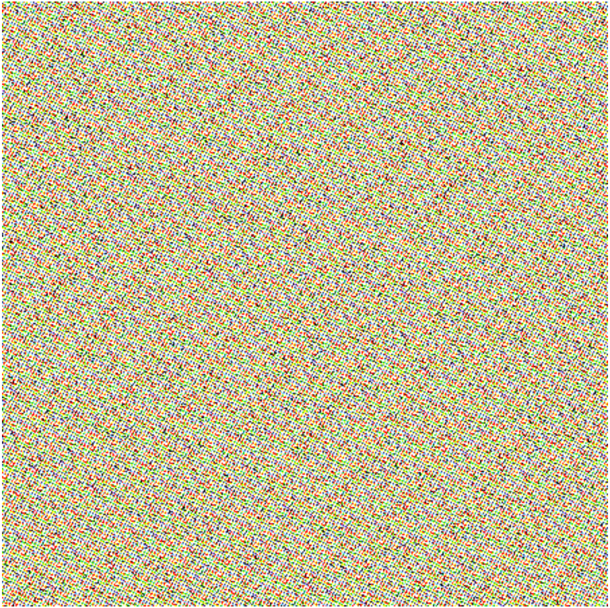


$n = 13$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur une image. . .

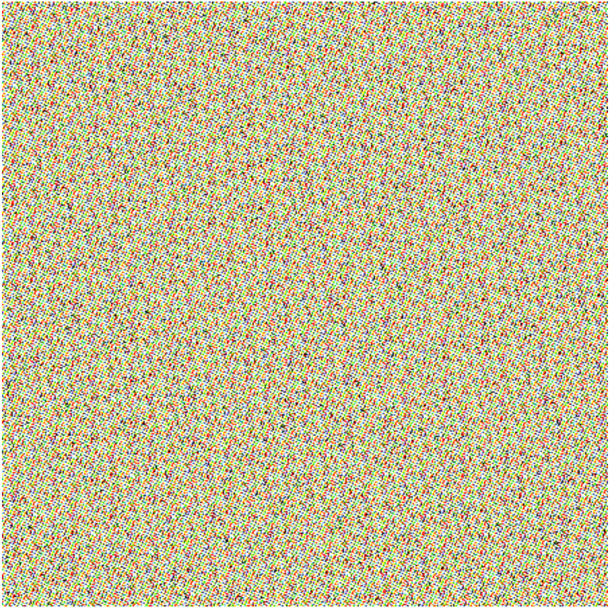
$n = 14$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



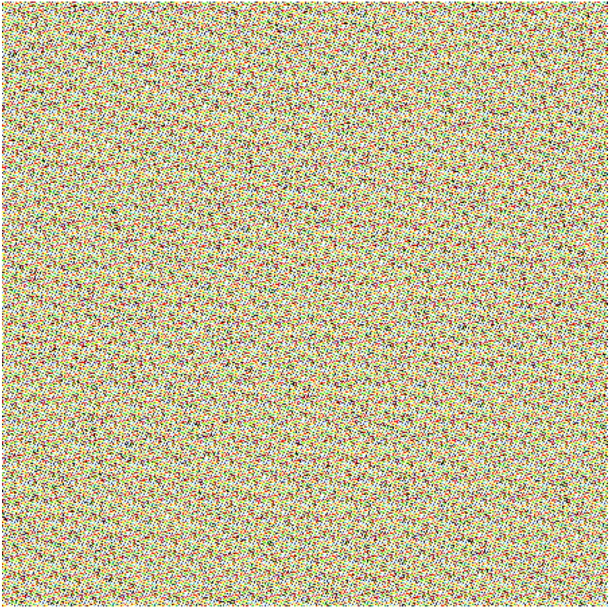
$n = 15$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur une image...



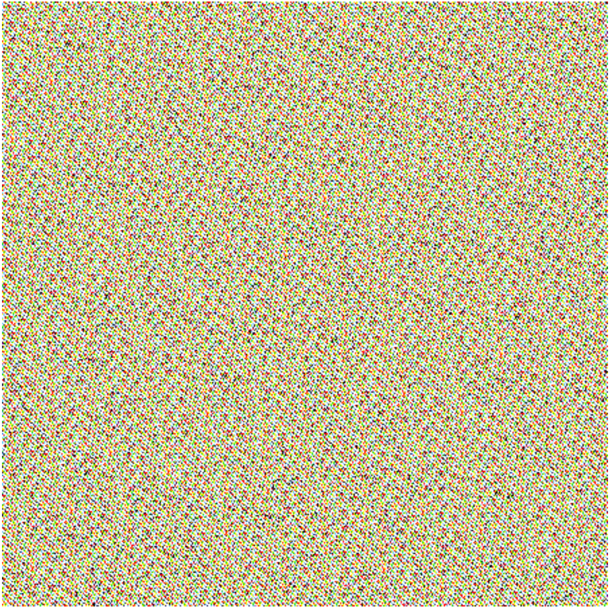
$n = 16$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



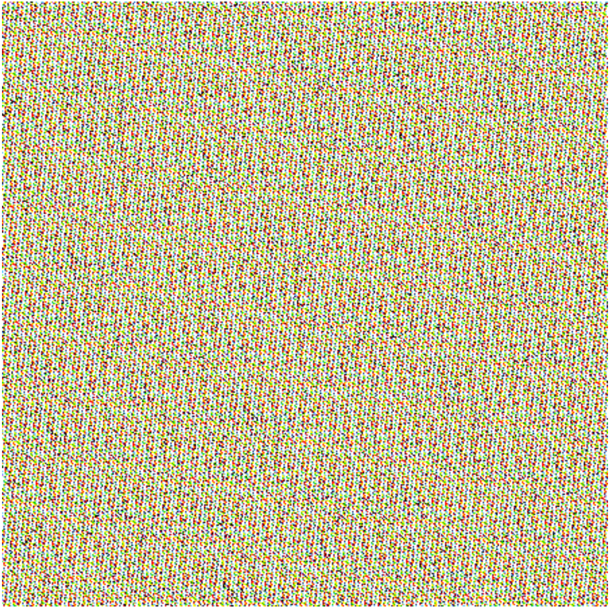
$n = 17$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



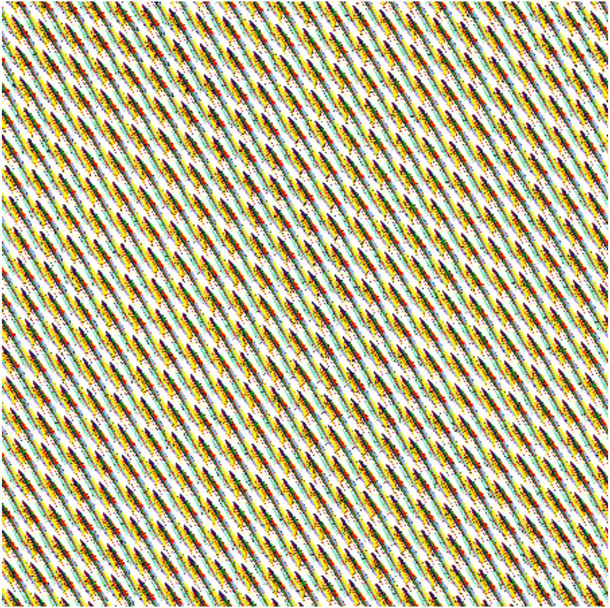
$n = 18$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



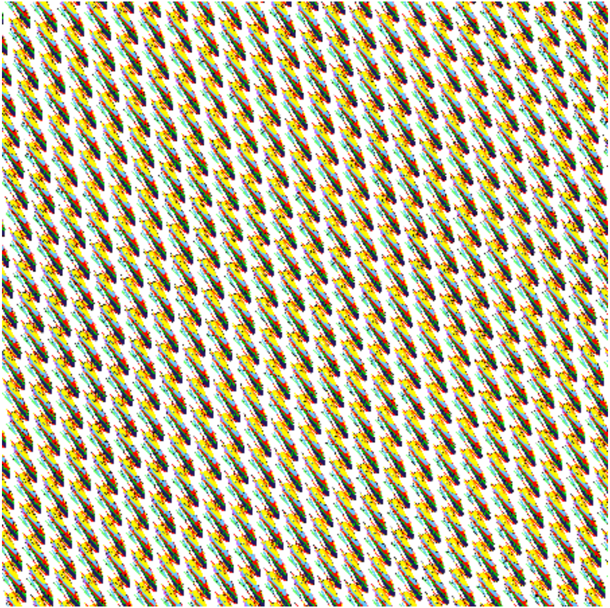
$n = 19$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



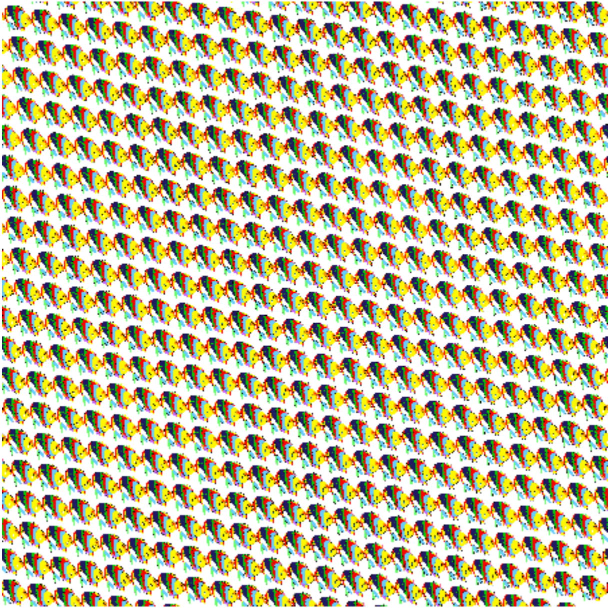
$n = 102$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



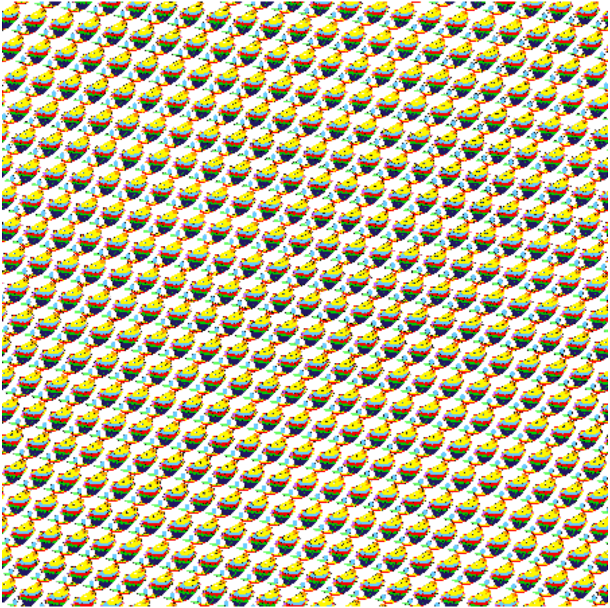
$n = 103$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ sur une image...



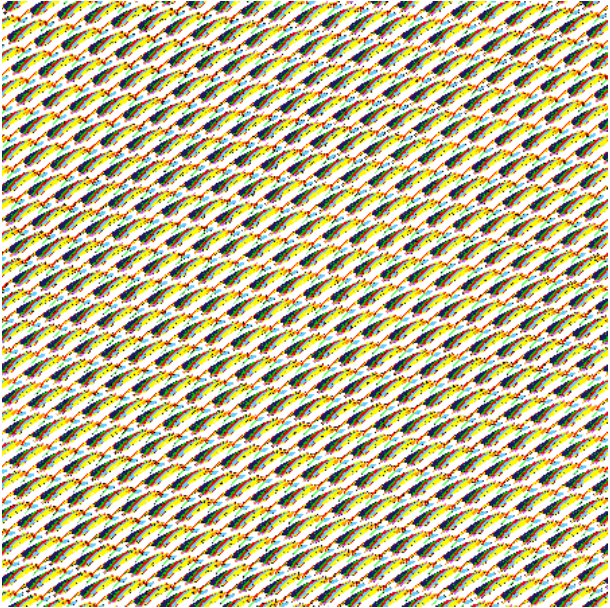
$n = 104$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ sur une image...



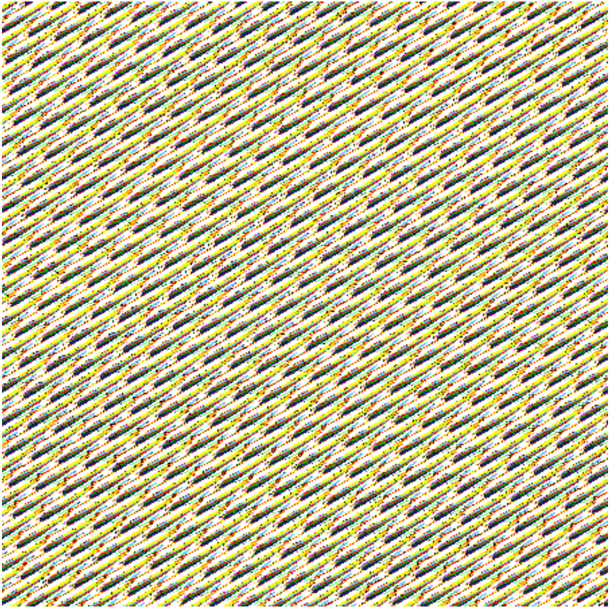
$n = 105$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



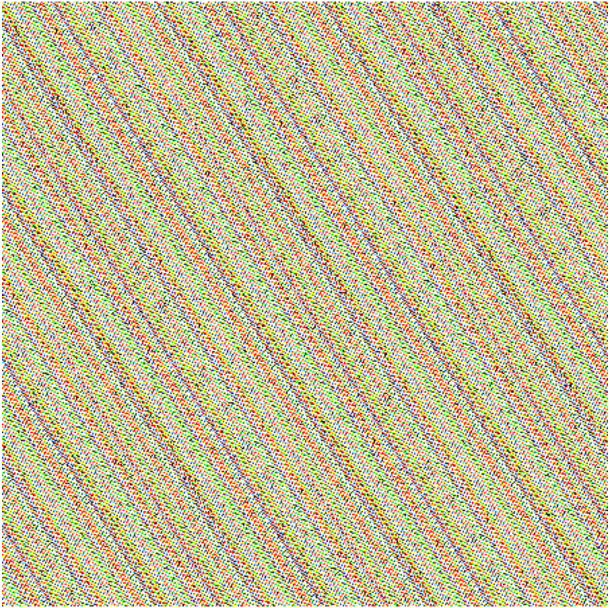
$n = 106$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



$n = 107$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...

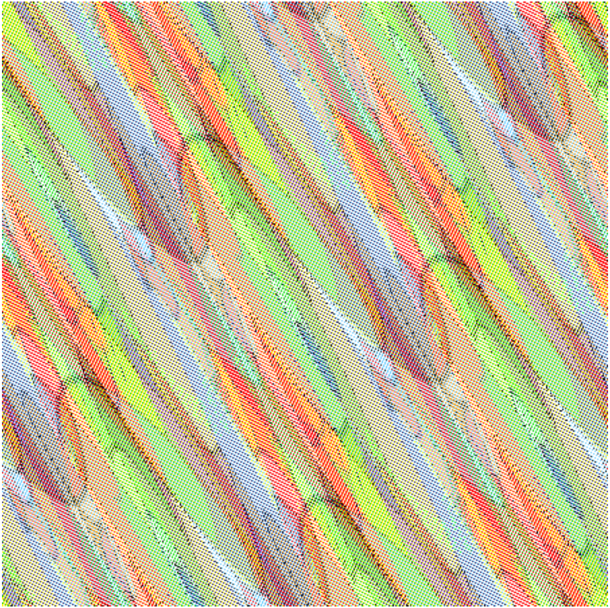


$n = 113$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...

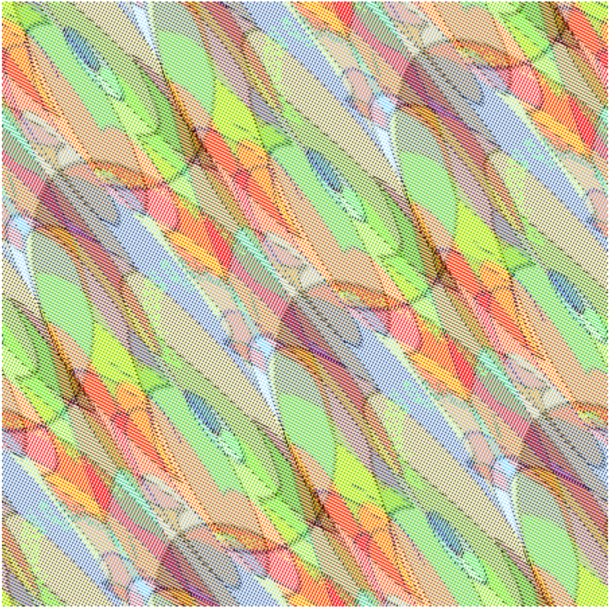
$n = 116$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



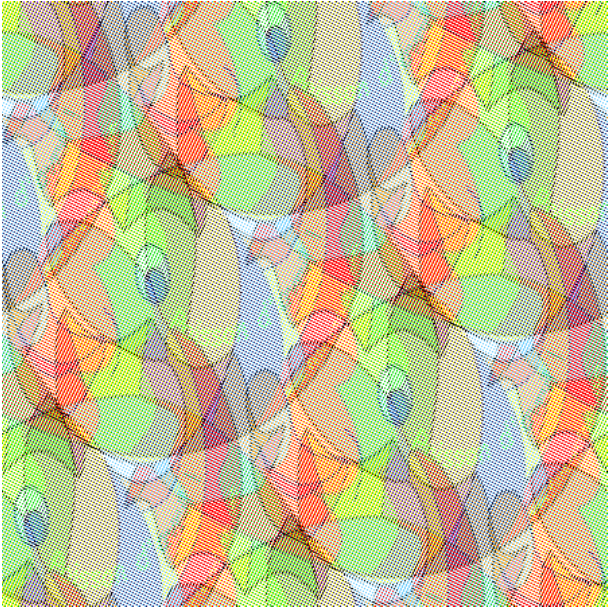
$n = 118$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur une image. . .



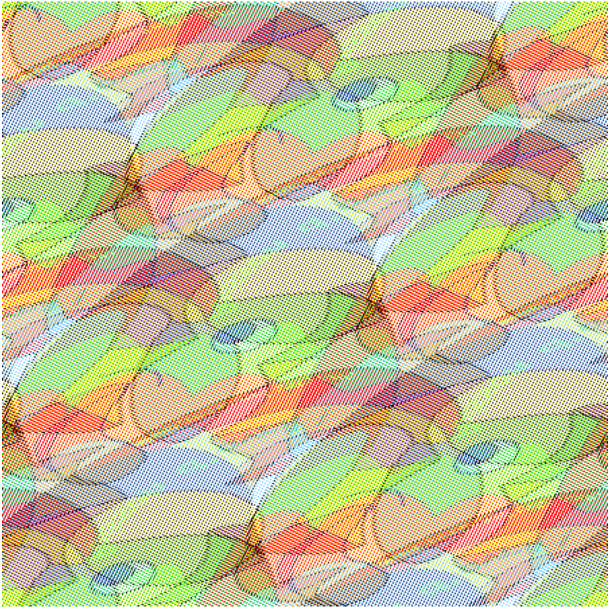
$n = 119$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



$n = 120$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...

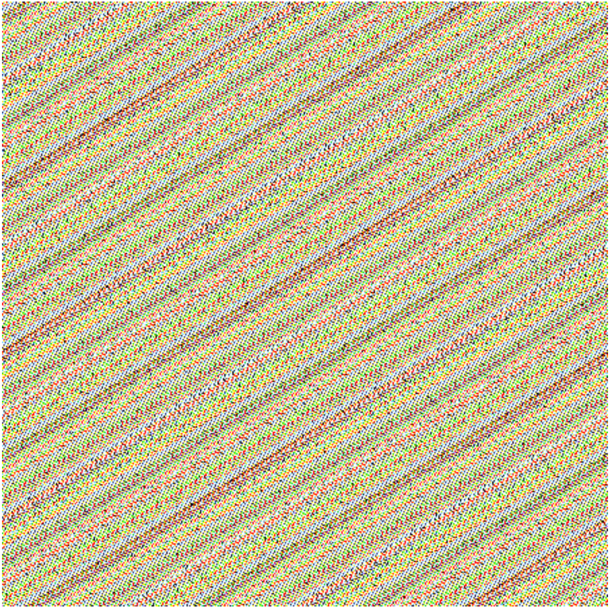


$n = 121$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...

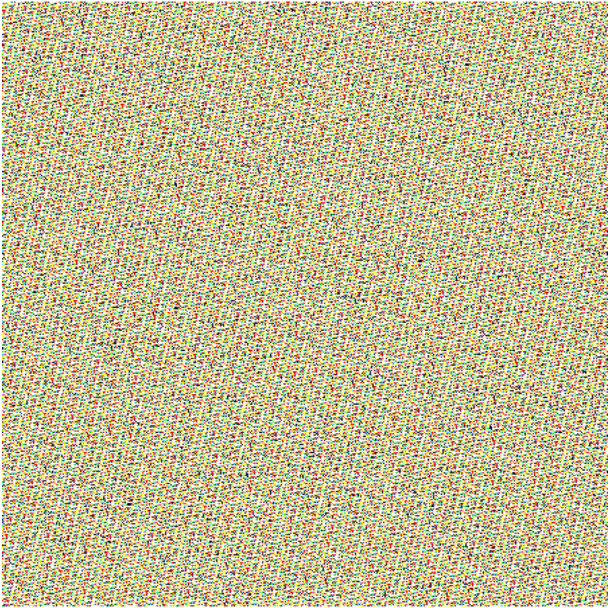
$n = 124$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur une image. . .



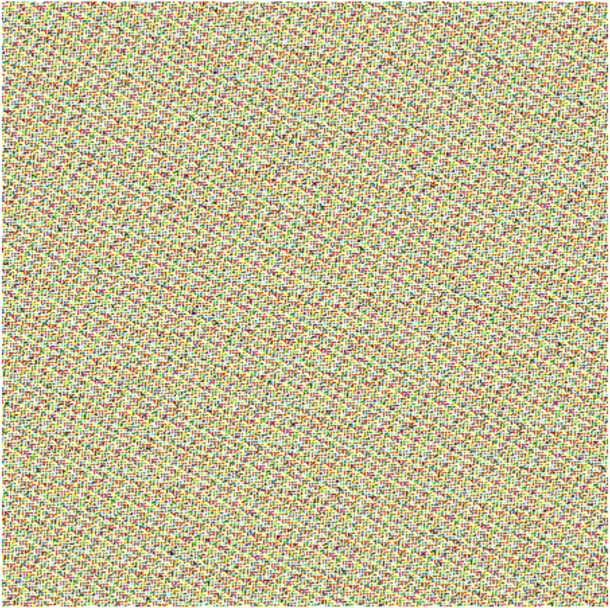
$n = 127$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



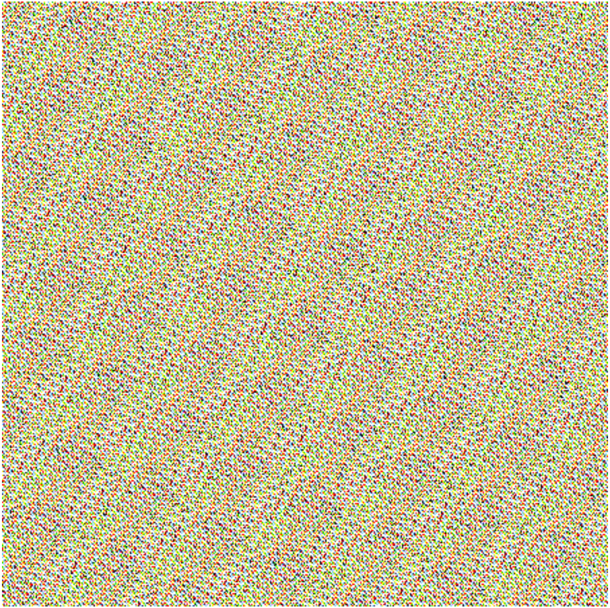
$n = 131$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



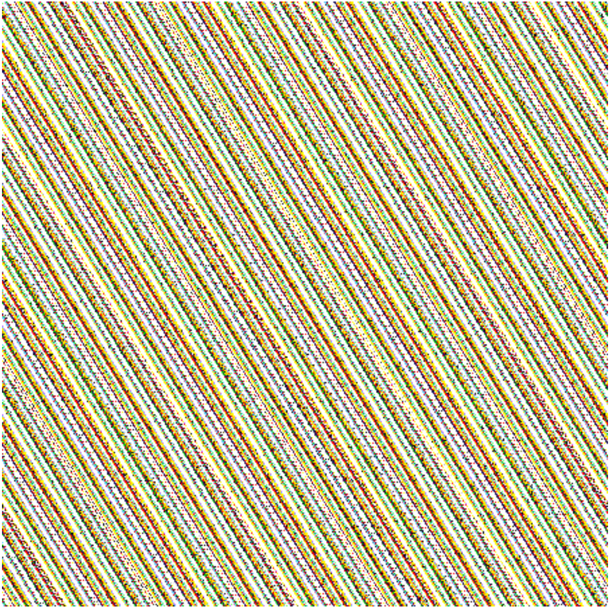
$n = 159$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image. . .



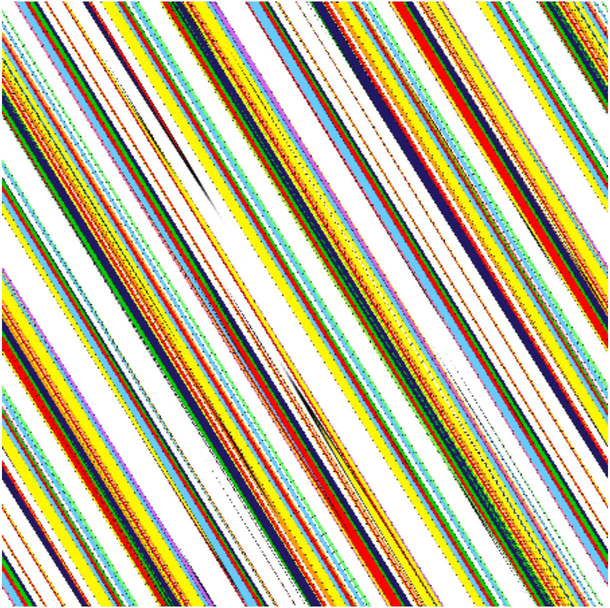
$n = 568$

Exemple 3 : Action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ sur une image...



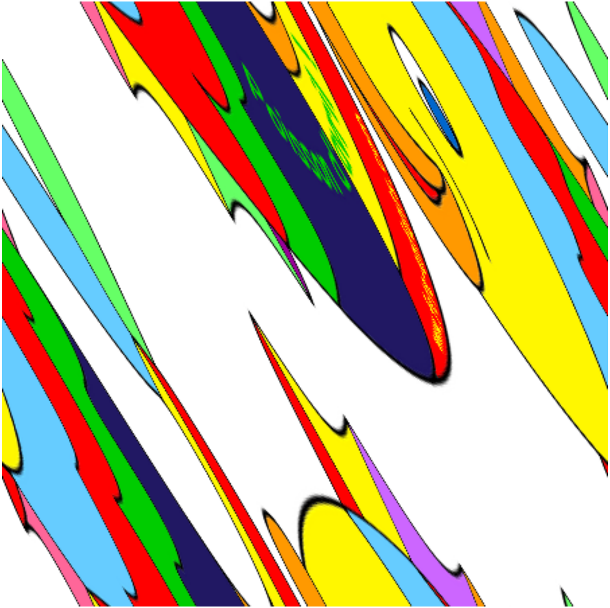
$n = 590$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...



$n = 594$

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...

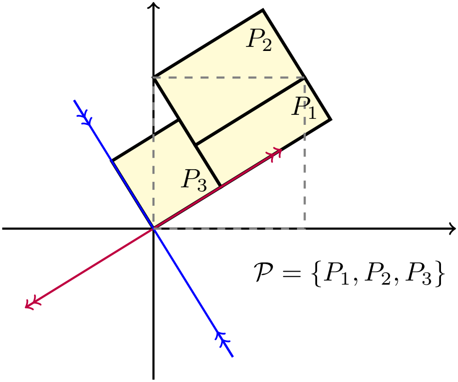


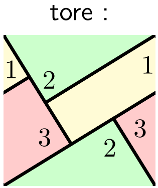
Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...

Exemple 3 : Action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur une image...

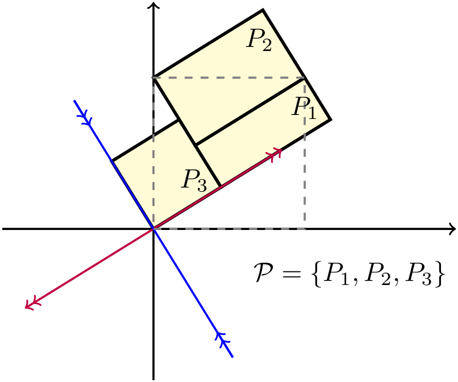
Maintenant, on veut trouver une partition de $[0,1]^2$ pour donner un bon codage des orbites de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exemple 3 : Choix d'une partition de $[0,1]^2$

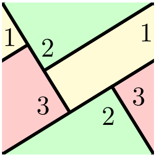


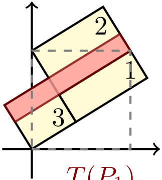


Exemple 3 : Choix d'une partition de $[0,1]^2$

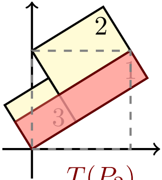


tore :

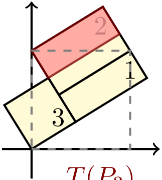




$T(P_1)$



$T(P_2)$



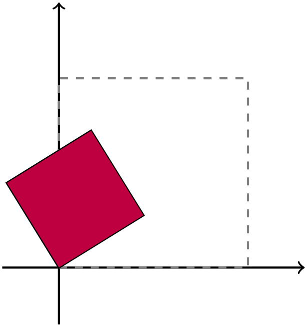
$T(P_3)$

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:

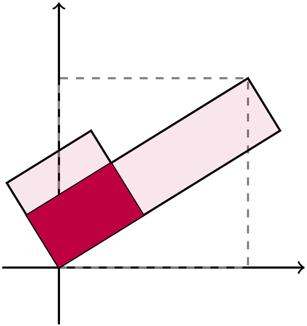


$\underline{3}$

P_3

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:

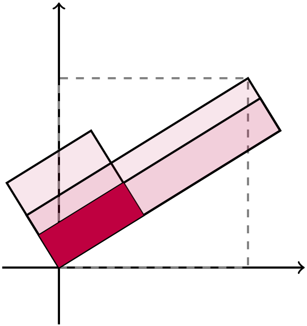


$2\underline{3}$

$T(P_2) \cap P_3$

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:

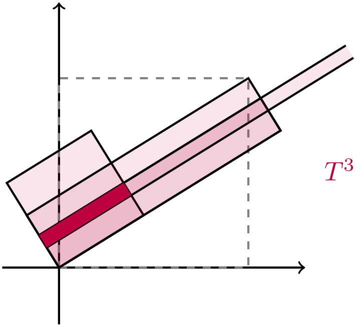


$32\underline{3}$

$T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3$

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:

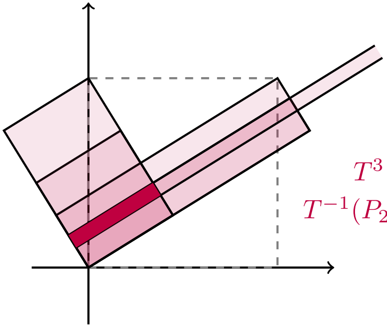


$132\underline{3}$

$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3$

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:

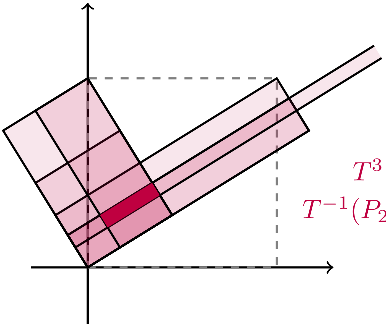


$132\underline{3}2$

$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap T^{-1}(P_2)$

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:

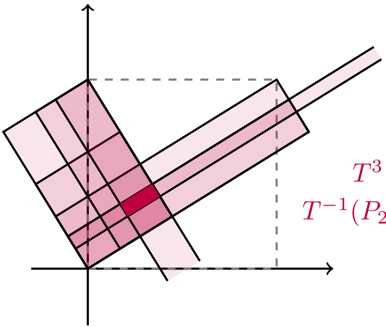


$132\underline{3}21$

$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1)$

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:

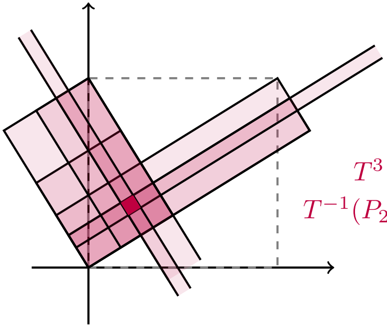


$132\underline{3}212$

$$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap$$
$$T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1) \cap T^{-3}(P_2)$$

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'<u>un seul</u> $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:

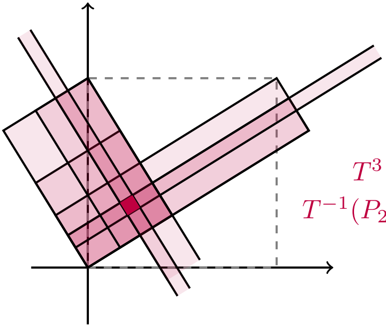


$$132\underline{3}2123$$

$$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap$$
$$T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1) \cap T^{-3}(P_2) \cap T^{-3}(P_3)$$

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:



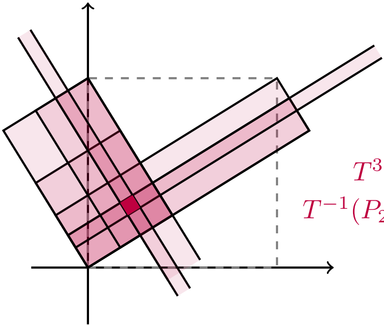
$132\underline{3}2123$

$$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1) \cap T^{-3}(P_2) \cap T^{-3}(P_3)$$

À la limite, c'est un point !

Exemple 3 : $\mathcal{P}$ donne-t-elle une représentation valide ?

On veut : À toute suite $(x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$ ne correspond qu'un seul $x \in X$.
Par exemple, la suite $\cdots 132\underline{3}2123 \cdots$:



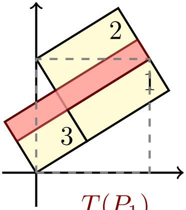
$132\underline{3}2123$

$T^3(P_1) \cap T^2(P_3) \cap T(P_2) \cap P_3 \cap$
$T^{-1}(P_2) \cap T^{-2}(P_1) \cap T^{-3}(P_2) \cap T^{-3}(P_3)$

À la limite, c'est un point !

Donc $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}(P_{x_n})$ ne contient qu'un seul point, $\forall\ (x_n) \in \Sigma_{\mathcal{P}}$.

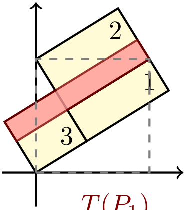
Exemple 3 : Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



$T(P_1)$

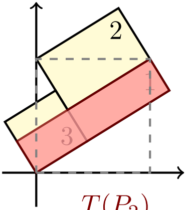
admissible : $12, 13$

Exemple 3 : Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



$T(P_1)$

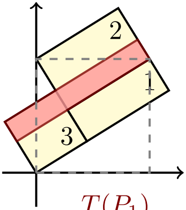
admissible : $12, 13$



$T(P_2)$

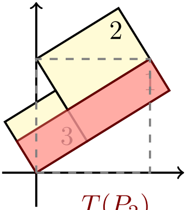
admissible : $21, 23$

Exemple 3 : Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



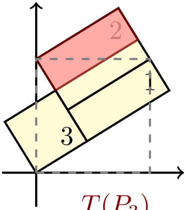
$T(P_1)$

admissible : $12, 13$



$T(P_2)$

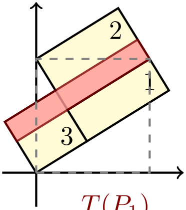
admissible : $21, 23$



$T(P_3)$

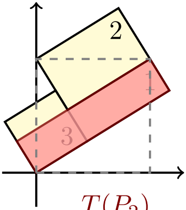
admissible : 32

Exemple 3 : Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



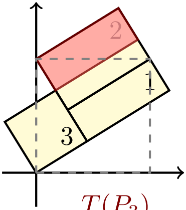
$T(P_1)$

admissible : $12, 13$



$T(P_2)$

admissible : $21, 23$

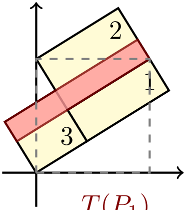


$T(P_3)$

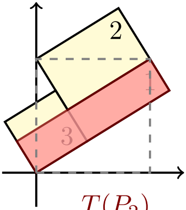
admissible : 32

- Inspection géométrique : ij et jk admissibles $\implies$ ijk admissible
  ➥ k ne dépend pas de i dans ijk (propriété markovienne)

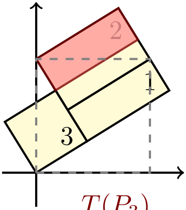
Exemple 3 : Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



$T(P_1)$
admissible : $12, 13$



$T(P_2)$
admissible : $21, 23$

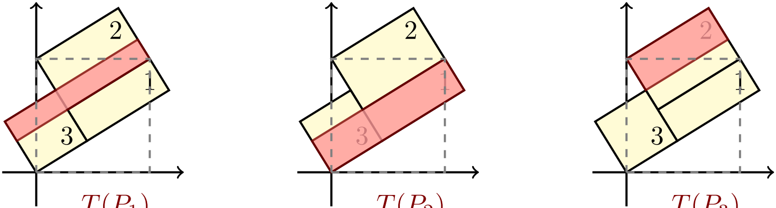


$T(P_3)$
admissible : 32

- Inspection géométrique : ij et jk admissibles $\Longrightarrow$ ijk admissible
  ➥ k ne dépend pas de i dans ijk (propriété markovienne)
- **Donc :**

$$\Sigma_{\mathcal{P}} \quad = \quad \{\text{suites ne contenant pas } 11, 22, 31, 33\}.$$

Exemple 3 : Description précise de $\Sigma_{\mathcal{P}}$



$T(P_1)$ admissible : $12, 13$ — $T(P_2)$ admissible : $21, 23$ — $T(P_3)$ admissible : 32

- Inspection géométrique : ij et jk admissibles $\Longrightarrow$ ijk admissible
  ➥ k ne dépend pas de i dans ijk (propriété markovienne)
- **Donc :**

$$\Sigma_{\mathcal{P}} \quad = \quad \{\text{suites ne contenant pas } 11, 22, 31, 33\}.$$

- C'est un sous-shift de type fini (on dit que $\mathcal{P}$ est une partition de Markov).

Exemple 3 : Conséquences

- $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est transitif donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ l'est aussi.
- $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est mélangeant donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ l'est aussi.
- Les points périodiques de $\Sigma_{\mathcal{P}}$ sont denses, donc ceux de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ le sont aussi.

Plus généralement, on a en 2D :

Théorème [Berg 67, Adler-Weiss 67]

On peut faire ça pour n'importe quelle matrice 2×2 de déterminant ± 1 et hyperbolique (*i.e.*, $\nexists$ v.p. de module 1).

➥ Constructions explicites : rectangles.

Et en dimension 3 ou plus ? Multiplication par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Théorème ☺ [Sinaĭ 68, Bowen 70's]

De telles partitions existent en dimension **quelconque**, pour toute matrice de déterminant ± 1 et hyperbolique.

- ➥ Constructions non-explicites.
- ➥ Optimal : $\exists$ v.p. de module $1 \implies$ pas de telle partition [Lind 78]

Et en dimension 3 ou plus ? Multiplication par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Théorème ☺ [Sinaĭ 68, Bowen 70's]

De telles partitions existent en dimension **quelconque**, pour toute matrice de déterminant ± 1 et hyperbolique.

- ➥ Constructions non-explicites.
- ➥ Optimal : $\exists$ v.p. de module $1 \implies$ pas de telle partition [Lind 78]

Théorème ☹ [Bowen 78, Cawley 91]

En dimension $\geqslant 3$, les morceaux sont forcément **moches** (*i.e.*, pas des rectangles, la frontière est fractale).

- ➥ Cela réduit les espérances de constructions explicites.

Et en dimension 3 ou plus ? Multiplication par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Théorème ☺ [Sinaĭ 68, Bowen 70's]

De telles partitions existent en dimension **quelconque**, pour toute matrice de déterminant ± 1 et hyperbolique.

- Constructions non-explicites.
- Optimal : $\exists$ v.p. de module $1 \implies$ pas de telle partition [Lind 78]

Théorème ☹ [Bowen 78, Cawley 91]

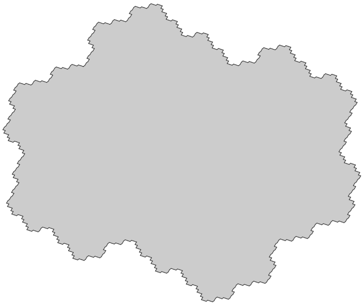
En dimension $\geqslant 3$, les morceaux sont forcément **moches** (*i.e.*, pas des rectangles, la frontière est fractale).

- Cela réduit les espérances de constructions explicites.
- **Mais pourtant. . .**

Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

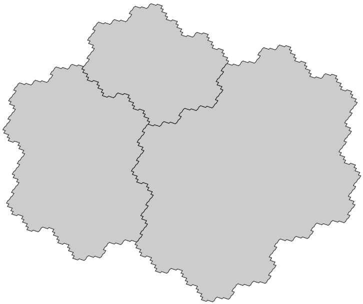
➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

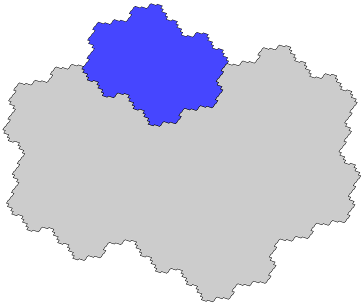
➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Une partition explicite en dimension 3 pour $\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

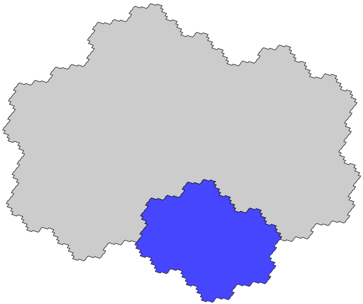
➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1,$ matrice d'incidence $M_\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$



Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

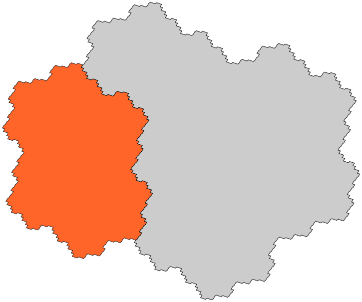
➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

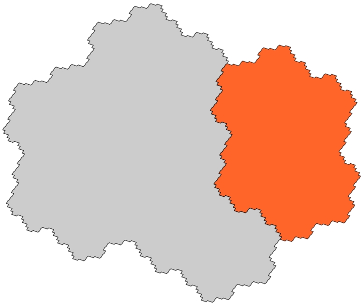
➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

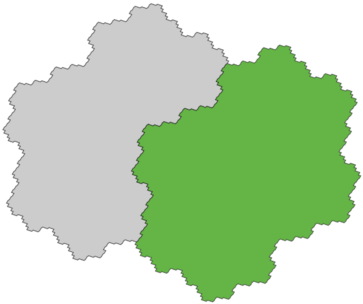
➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Une partition explicite en dimension 3 pour $\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

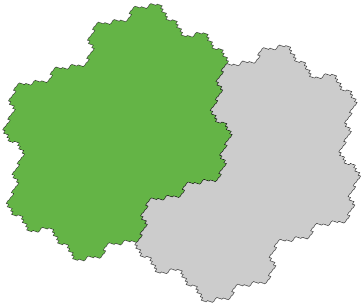
➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$



Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

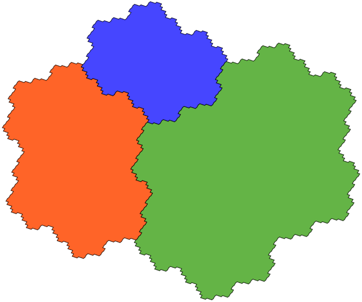
➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

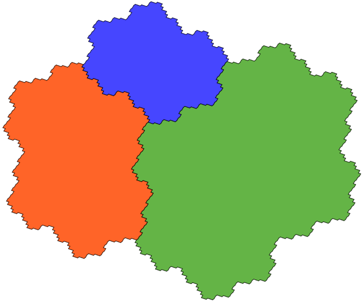
➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

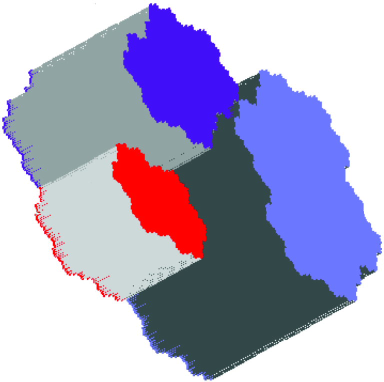


Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

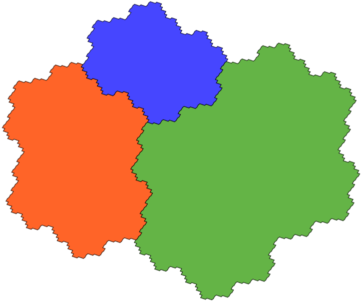


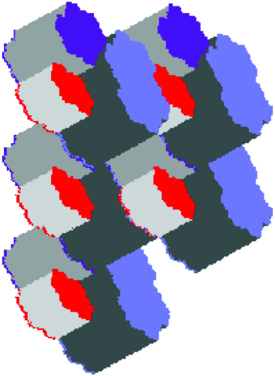


Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

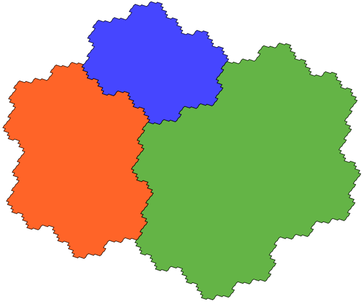


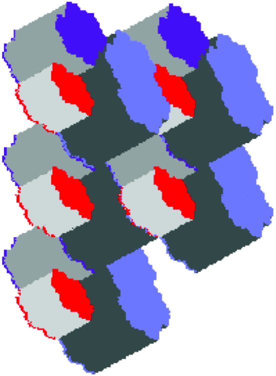


Une partition explicite en dimension 3 pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Outils : Substitutions, fractals de Rauzy

➥ $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$, matrice d'incidence $M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$





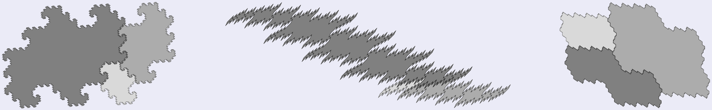
Cas général ? Pas de construction explicite générale connue.
(Conjecture Pisot $\Longrightarrow$ construction explicite pour les Pisot irréductibles.)

Partitions explicites pour des familles **infinies** de matrices

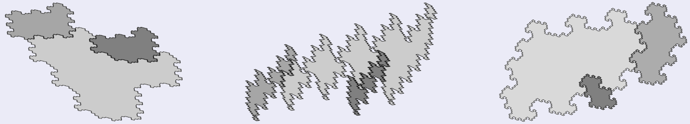
Corollaires de résultats sur les substitutions
[Berthé-Bourdon-J-Siegel 11] :

Partitions explicites pour les matrices qui sont des produits de :

- Matrices d'**Arnoux-Rauzy** : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$



- Matrices de **Jacobi-Perron** : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & B & C \end{pmatrix} : B \geqslant 0, C \geqslant \max(1, B) \right\}$



(Imaginer les « suspensions 3D » de ces fractals. . .)

➥ De plus, les morceaux sont connexes [Berthé-J-Siegel 10].

Conclusion et perspectives

On a vu par des exemples : ramener la dynamique d'un système continu à un objet discret (sous-shift) pour mieux en comprendre la dynamique.

Tâche

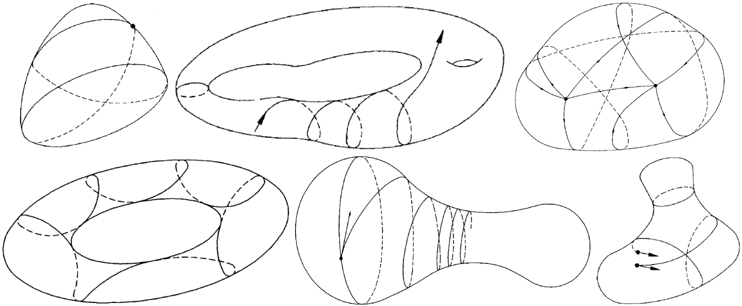
Construire explicitement des partitions de Markov des automorphismes du n-tore, pour $n \geqslant 3$.

Un problème ouvert très important lié à tout ça :

Problème ouvert

La conjugaison topologique entre deux SFT est-elle décidable ?

Merci de votre attention



D. Lind & B. Marcus, *Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, 1995.

R. L. Adler, *Symbolic Dynamics and Markov Partitions*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1998.