

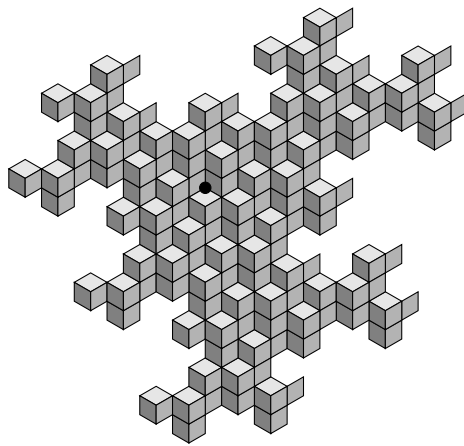
---

École normale supérieure de Lyon  
Rapport de stage de Master 2 d'informatique fondamentale

# Méthodes combinatoires pour l'engendrement de plans discrets

TIMO JOLIVET

Sous la direction de VALÉRIE BERTHÉ et ANNE SIEGEL



Stage réalisé au sein de l'équipe ARITH, au LIRMM à Montpellier  
Février – Juin 2010

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Plans discrets et substitutions</b>	<b>4</b>
1.1 Plans discrets . . . . .	4
1.2 Substitutions . . . . .	5
1.3 Substitutions généralisées . . . . .	5
1.3.1 Définition d'une substitution généralisée . . . . .	5
1.3.2 Propriétés fondamentales . . . . .	6
1.3.3 Interprétation géométrique . . . . .	7
1.4 Action des substitutions généralisées sur les plans discrets . . . . .	8
<b>2 Engendrer un plan discret</b>	<b>8</b>
2.1 Exploiter le développement en fraction continue du vecteur normal . . . . .	9
2.2 Quelques stratégies d'engendrement . . . . .	9
2.2.1 Le cas d'un plan substitutif . . . . .	9
2.2.2 Le cas d'un plan quelconque : l'algorithme de Jacobi-Perron . . . . .	10
2.2.3 Substitutions d'Arnoux-Rauzy . . . . .	11
2.2.4 Substitutions élémentaires . . . . .	11
2.3 Que se passe-t-il à la limite ? . . . . .	12
<b>3 Preuves combinatoires de connexité</b>	<b>12</b>
3.1 Couverture par une famille de motifs et stabilité . . . . .	12
3.2 Connexité, simple connexité, et $\mathcal{L}$ -couverture . . . . .	14
3.3 Application aux approximations d'Arnoux-Rauzy . . . . .	14
3.4 Application aux approximations de Jacobi-Perron . . . . .	16
3.5 Liens avec les règles de concaténation . . . . .	16
<b>4 Le fractal associé à une substitution</b>	<b>17</b>
4.1 Rappels topologiques . . . . .	17
4.2 Définition du fractal . . . . .	18
4.2.1 Hypothèses sur la substitution . . . . .	18
4.2.2 Approximations du fractal . . . . .	18
4.2.3 Convergence des approximations . . . . .	18
4.3 Liens entre les propriétés topologiques d'un fractal et de ses approximations . . . . .	19
<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>Références</b>	<b>22</b>

## Introduction

Les *plans discrets* interviennent dans de nombreux domaines, allant de la géométrie discrète à la dynamique des pavages et des quasi-cristaux. Ils sont en effet une des primitives de base de la géométrie discrète [Rev], et constituent une des familles les plus simples de pavages apériodiques [GS87, Moo00].

Une approche très fructueuse (initiée par Ito et Ohtsuki [IO93, IO94]) est de faire interagir les plans discrets avec les *substitutions généralisées*, introduites par Arnoux et Ito [AI01]. Elles sont une généralisation multidimensionnelle de la notion classique de substitution, où l'action ne se fait non pas sur les lettres d'un mot, mais sur des faces de cube unité dans l'espace. Une propriété remarquable est alors que l'image d'un plan discret par une substitution généralisée reste un plan discret.

On peut alors s'intéresser plus particulièrement à ce qu'il se passe lorsque l'on applique des substitutions généralisées à partir d'un sous-ensemble *fini* d'un plan discret. Il se trouve que l'on obtient ainsi des motifs de taille croissante qui sont des sous-ensembles de plans discrets (voir figure 1), phénomène que l'on peut interpréter comme une manière d'*engendrer* des plans discrets. Plusieurs stratégies d'engendrement sont envisageables, chaque stratégie reposant essentiellement sur le choix des substitutions.

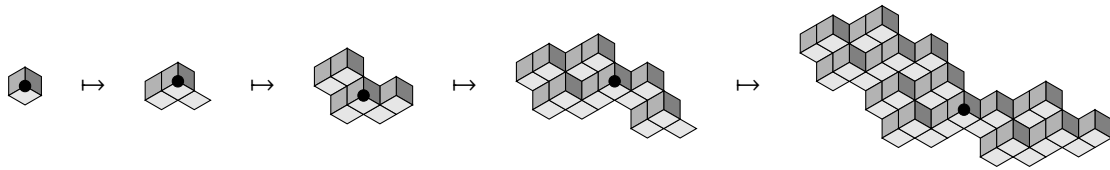


FIGURE 1 – Itération d'une substitution généralisée.

La forme des motifs que l'on obtient dépend fortement de la stratégie employée : on peut avoir des motifs connexes ou non, avec ou sans trous, ou encore concentrés autour d'un point ou étalés le long d'une droite. Dans ce mémoire, nous considérerons plusieurs exemples de stratégies d'engendrement, et étudierons les propriétés topologiques des motifs approximatifs. L'apport principal de ce stage aura été de montrer, par des méthodes combinatoires, que les motifs associés à un produit de substitutions d'Arnoux-Rauzy sont connexes (théorème 3.8).

Que se passe-t-il lorsque l'on applique un nombre infini de substitutions ? On s'attend à ce que la taille des motifs tende vers l'infini (ce qui est le cas), mais il est possible (dans le cas où l'on itère une même substitution) de *renormaliser* l'ensemble obtenu à chaque étape, ce qui produit une suite convergente de sous-ensembles du plan (modulo une projection). La limite de cette suite est ce que l'on appelle le *fractal de Rauzy* associé à la substitution (définition 4.4). Les propriétés topologiques de ce fractal sont naturellement liées aux propriétés topologiques des motifs approximatifs, ce qui permet parfois d'obtenir certaines propriétés du fractal, comme par exemple la connexité. Nous prouverons ainsi que les fractals associés aux substitutions d'Arnoux-Rauzy sont connexes (théorème 4.7).

**Plan du document.** On commencera par donner les définitions classiques des plans discrets et des substitutions généralisées dans la section 1. On décrira ensuite plusieurs stratégies d'engendrement d'un plan discret (section 2), puis l'on étudiera les propriétés topologiques des motifs obtenus en introduisant des propriétés combinatoires de *couverture par une famille de motifs* dans la section 3. Pour finir, on donnera une définition du fractal de Rauzy associé à une substitution, puis l'on utilisera les résultats de la section précédente afin de montrer que certaines classes de fractals de Rauzy sont connexes (section 4).

# 1 Plans discrets et substitutions

Le but de cette section est de définir les plans discrets et les substitution généralisées. Le formalisme sur lequel nous nous baserons a été esquissé par Ito et Ohtsuki [IO93, IO94], puis raffiné par Arnoux et Ito [AI01]. On décrira ensuite comment les substitutions généralisées agissent sur les plans discrets, comme l'ont mis en évidence Arnoux et Ito [AI01].

## 1.1 Plans discrets

Commençons par donner une définition géométrique d'un plan discret. Nous nous restreindrons à des plans discrets « sans épaisseur » et contenant l'origine  $(0, 0, 0)$ , mais des définitions prenant la hauteur et l'épaisseur d'un plan existent (voir par exemple la définition classique de plan arithmétique discret de Réveillé [Rev]).

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , et notons  $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$  le produit scalaire de deux vecteurs. Rappelons d'abord que le plan de vecteur normal  $v \in \mathbb{R}^3$  est l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\langle x, v \rangle = 0$ . La définition qui suit décrit un plan discret comme la « frontière supérieure » de l'union des cubes unité qui intersectent le plan de départ.

**Définition 1.1** (Plan discret). Soit  $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$  un vecteur non nul. On note  $\mathcal{S}$  l'union des cubes unité fermés (dont les sommets ont des coordonnées entières) qui intersectent le demi-espace des points  $x \in \mathbb{R}^3$  vérifiant  $\langle x, v \rangle < 0$ . On définit le *plan discret*  $\mathcal{P}_v$  de vecteur normal  $v$  comme étant la frontière topologique de  $\mathcal{S}$ .

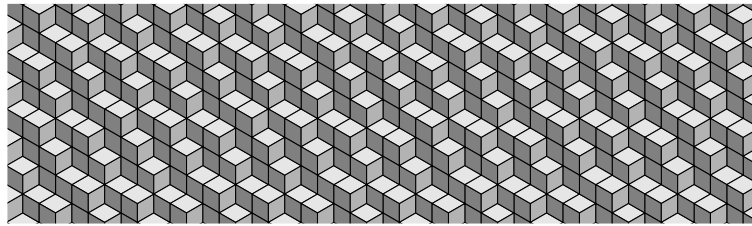


FIGURE 2 – Aperçu d'un plan discret.

**Faces d'un plan discret.** Un plan discret est naturellement recouvert par des faces de cube unité. Soient  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $x \in \mathbb{Z}^3$ . On appelle *face unité de type  $i$  située au point  $x$*  l'ensemble  $[x, i]^*$  défini par<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} [x, 1]^* &= \{x + \lambda e_2 + \mu e_3 : \lambda, \mu \in [0, 1]\} \\ [x, 2]^* &= \{x + \lambda e_1 + \mu e_3 : \lambda, \mu \in [0, 1]\} \\ [x, 3]^* &= \{x + \lambda e_1 + \mu e_2 : \lambda, \mu \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

(voir figure 3). Si  $y \in \mathbb{R}^3$ , on peut écrire  $y + [x, i]^*$  à la place de  $[x+y, i]^*$ . Le type  $i$  de la face  $[x, i]^*$  correspond au vecteur  $e_i$  qui est orthogonal à cette face.

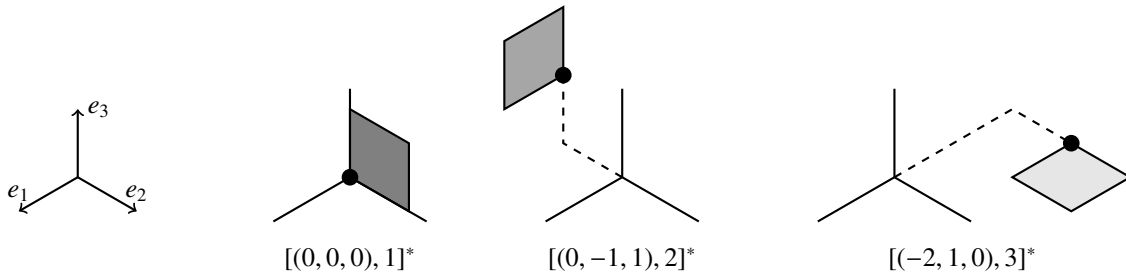


FIGURE 3 – Trois exemples de faces de types différents.

1. Ce choix de faces unité n'est pas canonique ; nous considérons les faces « inférieures » du cube unité, mais certains auteurs considèrent les faces « supérieures ».

**Une définition calculatoire des plans discrets.** Le recouvrement par des faces permet de donner une définition plus calculatoire des plans discrets, où l'appartenance d'une face à un plan est traduite par une inégalité sur des produits scalaires. Cela s'avèrera très pratique dans les démonstrations qui vont suivre.

**Proposition 1.2.** *Le plan discret  $\mathcal{P}_v$  est l'union des faces  $[x, i]^*$  vérifiant  $0 \leq \langle x, v \rangle < \langle e_i, v \rangle$ .*

Une preuve rigoureuse de cette proposition est donnée dans [ABI02] et [ABS04]. L'idée est d'observer que la face  $[x, i]^*$  est dans  $\mathcal{P}_v$  si et seulement si  $x - e_i \in \mathcal{S}$  et  $x \notin \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  est le demi-espace associé au plan, ce qui se traduit par  $\langle x - e_i, v \rangle < 0$  et  $\langle x, v \rangle \geq 0$ .

## 1.2 Substitutions

Nous introduisons maintenant le concept de substitution, qui sera nécessaire pour définir les substitutions généralisées dans la section 1.3.

**Définition 1.3 (Substitution).** Soit  $\mathcal{A}$  un alphabet fini. Une *substitution* est une application  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ , telle que l'image de chaque lettre n'est pas le mot vide. Une substitution peut naturellement être étendue à  $\mathcal{A}^*$  par concaténation, c'est-à-dire en requérant que  $\sigma(u)\sigma(v) = \sigma(uv)$  pour tout  $u, v \in \mathcal{A}^*$ . Autrement dit, une substitution est un morphisme du monoïde libre  $\mathcal{A}^*$  pour la concaténation.

La *matrice d'incidence* d'une substitution  $\sigma$  est la matrice carrée  $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$  définie par  $M = (m_{ij})$ , où  $m_{ij}$  compte le nombre d'occurrences de la lettre  $i$  dans  $\sigma(j)$ .

**Exemple 1.4.** Un exemple classique d'une substitution sur trois lettres est la *substitution de Tribonacci*, que nous utiliserons plusieurs fois dans ce mémoire afin d'illustrer certaines notions. Son action sur  $\{1, 2, 3\}$  et sa matrice d'incidence sont données par

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.3 Substitutions généralisées

Nous allons maintenant définir la *substitution généralisée* associée à une substitution  $\sigma$ , qui agit sur des faces unité et non plus sur des lettres. Le passage de la dimension un (les lettres) à la dimension supérieure (les faces unité) est loin d'être évident. Bien qu'il soit facile d'associer un motif à chacune des trois faces unité (comme on le fait pour les lettres), tout se complique lorsque l'on considère l'image d'un motif constitué de *plusieurs* faces : comment placer l'image d'une face par rapport à l'image d'une autre face ? En dimension un, la réponse est naturelle : on peut concaténer les images grâce à  $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$ . En dimension supérieure, il n'y a pas de réponse simple en général. Les substitutions généralisées constituent une approche possible à cette question difficile.

### 1.3.1 Définition d'une substitution généralisée

La seule hypothèse sur  $\sigma$  dont nous aurons besoin pour l'instant est l'unimodularité : une substitution est *unimodulaire* si sa matrice d'incidence  $M$  vérifie  $\det M = \pm 1$ . Cela nous garantit que la matrice d'incidence est inversible et que son inverse est à coefficients entiers.

**L'abélianisé d'un mot.** Soit  $w \in \{1, 2, 3\}^*$  un mot. On appelle l'*abélianisé* de  $w$  le vecteur  $\ell(w) \in \mathbb{N}^3$  qui « compte » le nombre d'occurrences de chaque lettre :  $\ell(w) = (|w|_1, |w|_2, |w|_3)$ . Par exemple, l'abélianisé du mot 11213121 est le vecteur (5, 2, 1).

Cela revient à dire que  $\ell(w)$  est le vecteur qui pointe l'arrivée du segment brisé obtenu en concaténant les segments unité correspondant aux lettres de  $w$ . Le terme « abélianisé » est justifié par le fait que l'on « oublie » l'ordre des lettres du mot.

**Définition 1.5 (Substitution généralisée).** Soit  $\sigma : \{1, 2, 3\}^* \rightarrow \{1, 2, 3\}^*$  une substitution unimodulaire, et  $M$  sa matrice d'incidence. On associe à  $\sigma$  la *substitution généralisée*  $E_1^*(\sigma)$  définie par

$$E_1^*(\sigma)([x, i]^*) = \bigcup_{k=1,2,3} \bigcup_{s|\sigma(k)=pis} [M^{-1}(x + \ell(s)), k]^*.$$

L'extension de  $E_1^*(\sigma)$  à tout sous-ensemble  $D$  d'un plan discret  $\mathcal{P}_v$  est naturelle :

$$E_1^*(\sigma)(D) = \bigcup_{[x,i]^* \subseteq D} E_1^*(\sigma)([x,i]^*).$$

**Exemple 1.6.** Expliquons comment interpréter la définition 1.5 au travers d'un exemple. Soit  $\sigma$  la substitution de Tribonacci de l'exemple 1.4, définie par  $1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ . Sa matrice d'incidence et son inverse sont donnés par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

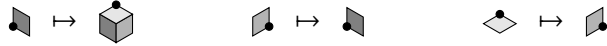
Soit  $x \in \mathbb{Z}^3$ . Calculons l'image de la face  $[x, 1]^*$  par  $E_1^*(\sigma)$ . Pour chaque  $k \in \{1, 2, 3\}$ , on cherche les occurrences de 1 dans  $\sigma(k)$ . La première occurrence est  $\sigma(1) = 12$ , c'est-à-dire  $\sigma(1) = pis$ , où  $p$  est le mot vide,  $i = 1$  et  $s = 2$ . Cela donne donc la face

$$[M^{-1}(x + \ell(2)), 1]^* = M^{-1}x + [M^{-1}(0, 1, 0), 1]^* = M^{-1}x + [(1, 0, -1), 1]^*.$$

La deuxième occurrence de 1 dans  $\sigma(k)$  est  $\sigma(2) = 13$ , ce qui donne la face  $[M^{-1}(x + \ell(3)), 2]^* = M^{-1}x + [(0, 1, -1), 2]^*$ . La dernière occurrence est  $\sigma(3) = 1$ , ce qui donne la face  $[(0, 0, 0), 3]^*$ . L'image de  $[x, 1]^*$  est donc l'union des trois faces obtenues ci-dessus, qui sont toutes translatées par le même vecteur  $M^{-1}x$ . En procédant de même pour les deux autres faces, on obtient :

$$\begin{aligned} E_1^*(\sigma)([x, 1]^*) &= M^{-1}x + [(1, 0, -1), 1]^* \cup [(0, 1, -1), 2]^* \cup [(0, 0, 0), 3]^* \\ E_1^*(\sigma)([x, 2]^*) &= M^{-1}x + [(0, 0, 0), 1]^* \\ E_1^*(\sigma)([x, 3]^*) &= M^{-1}x + [(0, 0, 0), 2]^* \end{aligned}.$$

Graphiquement, cela donne :



(les points noirs servent à marquer l'origine). Remarquons que dans cet exemple, la lettre  $i$  n'apparaît au plus qu'une seule fois dans  $\sigma(k)$ . Dans le cas général, il faut bien prendre en compte les multiples occurrences de  $i$  si  $i$  apparaît plusieurs fois dans  $\sigma(k)$ .

### 1.3.2 Propriétés fondamentales

Les substitutions généralisées vérifient quelques propriétés fondamentales, que nous utiliserons implicitement dans la suite.

**Composition.** L'opérateur  $E_1^*$  se comporte bien vis-à-vis de la composition des substitutions : pour toutes substitutions  $\sigma$  et  $\sigma'$ , on a  $E_1^*(\sigma \circ \sigma') = E_1^*(\sigma') \circ E_1^*(\sigma)$ . Remarquons que l'ordre de composition est inversé. Pour une démonstration de ce résultat, voir [AI01, Fer07b].

**Linéarité.** Une substitution généralisée  $E_1^*(\sigma)$  est entièrement caractérisée par son action sur les trois faces  $[(0, 0, 0), 1]^*$ ,  $[(0, 0, 0), 2]^*$ ,  $[(0, 0, 0), 3]^*$ , et par la matrice d'incidence  $M$  de  $\sigma$ . Ceci est dû à la linéarité de la multiplication par  $M^{-1}$ , et au fait que  $E_1^*(\sigma)([x, i]^*) = M^{-1}x + E_1^*(\sigma)([0, i]^*)$  pour tout  $i = 1, 2, 3$ .

**Consistance.** Remarquons tout d'abord que l'image d'une face par  $E_1^*(\sigma)$  est une union *disjointe* de faces, car la décomposition  $\sigma(k) = pis$  implique qu'à deux faces différentes de même type  $k$  ne peut pas correspondre le même vecteur  $\ell(s)$ .

Il est en outre souhaitable qu'une substitution généralisée soit *consistante*, c'est-à-dire que les images de deux faces quelconques soient disjointes<sup>2</sup>. Rien ne garantit cela dans le cas général. Une telle propriété de consistance est cependant vérifiée si les deux faces considérées appartiennent à un même plan discret, comme le montre la propriété suivante.

**Proposition 1.7** (Arnoux, Ito [AI01]). *Si  $[x, i]^*$  et  $[x', i']^*$  sont deux faces distinctes de  $\mathcal{P}_v$ , alors les ensembles  $E_1^*(\sigma)([x, i]^*)$  et  $E_1^*(\sigma)([x', i']^*)$  ne partagent aucune face unité.*

2. Le terme « disjoint » signifie ici que les deux images ne partagent aucune face unité mais peuvent cependant être adjacentes.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une face  $[y, k]^*$  dans  $E_1^*(\sigma)([x, i]^*) \cap E_1^*(\sigma)([x', i']^*)$ . On a alors  $[y, k]^* = [M^{-1}(x + \ell(s)), k]^* = [M^{-1}(x' + \ell(s')), k]^*$ , avec  $\sigma(k) = pis = p'i's'$ . Si  $s = s'$ , alors  $i = i'$  et  $x = x'$ , ce qui contredit le fait que les faces  $[x, i]^*$  et  $[x', i']^*$  sont distinctes.

Si  $s \neq s'$ , alors on peut supposer que  $|s| < |s'|$ , et donc  $\ell(s') = \ell(s) + e_i + z$ , où  $z \in \mathbb{N}^3$ . Cela implique que  $x = x' + e_i + z$ , puisque  $x + \ell(s) = x' + \ell(s')$ . On a alors :

$$\langle x, v \rangle = \langle x' + e_i + z, v \rangle = \langle e_i, v \rangle + \langle z, v \rangle + \langle x', v \rangle \geq \langle e_i, v \rangle,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que  $[x, i]^* \subseteq \mathcal{P}_v$ . ◻

### 1.3.3 Interprétation géométrique

La définition 1.5 peut sembler obscure au premier abord : d'où vient la formule de la définition de  $E_1^*(\sigma)$  ? Nous tentons de répondre à cette question en donnant une interprétation géométrique des substitutions et des substitutions généralisées, comme l'ont fait Arnoux et Ito [AI01].

La lecture de cette sous-section n'est pas nécessaire pour la suite, mais aide à mieux comprendre la nature des substitutions généralisées. Les résultats informels qui suivent peuvent varier légèrement selon le choix des faces unité (les faces « inférieures » ou « supérieures » du cube unité), mais rien de fondamental ne change vraiment (il faudra au pire changer un signe, remplacer  $M$  par  ${}^tM$ , ou bien inverser  $\ell(p)$  et  $\ell(s)$ ).

**Segment unité.** Soient  $x \in \mathbb{Z}^3$  et  $i \in \{1, 2, 3\}$ , et notons  $[x, i]$  le *segment unité de type  $i$  situé au point  $x$* , c'est-à-dire le segment dont les extrémités sont  $x$  et  $x + e_i$ . Un segment unité est l'analogue unidimensionnel d'une face unité. Le segment  $[x, i]$  et la face  $[x, i]^*$  sont orthogonaux, et leur origine coïncide.

**Chemin associé à un mot.** Soit  $w = w_1 \cdots w_n \in \{1, 2, 3\}^*$  un mot. On peut lui associer un chemin en concaténant les segments unité  $e_{w_k}$  : on note  $\gamma(w)$  l'ensemble défini par

$$\gamma(w) = \bigcup_{k=1}^n [\ell(w_1 \cdots w_{k-1}), w_k].$$

Remarquons que l'extrémité du chemin  $\gamma(w)$  est donnée par  $\ell(w)$ .

**L'application  $E_0(\sigma)$ .** Soit  $\sigma$  une substitution, et soit  $E_0(\sigma) : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$  l'unique application linéaire vérifiant  $E_0(\ell(w)) = \ell(\sigma(w))$  pour tout mot  $w \in \{1, 2, 3\}^*$ . Cette application envoie l'extrémité du chemin  $\gamma(w)$  sur l'extrémité du chemin  $\gamma(\sigma(w))$ , et correspond en fait à la multiplication par  $M$ . Il s'agit d'une interprétation « zéro-dimensionnelle » de  $\sigma$ , dans le sens où elle agit sur des points, d'où le « 0 » dans  $E_0(\sigma)$ .

**L'application  $E_1(\sigma)$ .** On voudrait maintenant agir sur les chemins eux-mêmes, et pas seulement sur leurs extrémités (comme le fait  $E_0(\sigma)$ ), c'est-à-dire envoyer  $\gamma(w)$  sur  $\gamma(\sigma(w))$ . On associe donc à  $\sigma$  l'unique application linéaire  $E_1(\sigma)$  vérifiant  $E_1(\sigma)(\gamma(w)) = \gamma(\sigma(w))$ . Un calcul montre que l'image d'un segment  $[x, i]$  est donnée par

$$E_1([x, i]) = \bigcup_{k|\sigma(i)=pks} [Mx + \ell(p), k],$$

et cela suffit pour caractériser  $E_1(\sigma)$ , par linéarité de la multiplication par  $M$ . Cette interprétation géométrique peut donc être vue comme « unidimensionnelle » car elle agit sur des segments unité, d'où le « 1 » dans  $E_1(\sigma)$ .

**L'application  $E_1^*(\sigma)$ .** Le passage de  $E_1(\sigma)$  à  $E_1^*(\sigma)$  se fait par dualité :  $E_1^*(\sigma)$  est l'application duale de  $E_1(\sigma)$ . Nous ne donnerons pas plus de détails mais c'est l'idée qu'ont eu Arnoux et Ito dans [AI01], qui a permis de clarifier la nature des substitutions généralisées, dont l'étude avait déjà commencé dans [IK91] et [IO93].

**Généralisation.** Ce formalisme a été généralisé par Sano, Arnoux et Ito [SAI01], où une définition de  $E_k(\sigma)$  et  $E_k^*(\sigma)$  est donnée, pour  $k \leq d$  dans  $\mathbb{R}^d$ . L'application  $E_k(\sigma)$  agit sur des faces unité de dimension  $k$ , tandis que  $E_k^*(\sigma)$  agit sur des faces de dimension  $d - k$  (ce qui cohérent avec notre  $E_1^*(\sigma)$ , qui agit sur des faces de dimension  $2 = 3 - 1$ ).

## 1.4 Action des substitutions généralisées sur les plans discrets

On s'intéresse maintenant à l'action d'une substitution généralisée sur un plan discret. Rien ne garantit *a priori* que l'image d'un plan discret reste un plan discret. Le caractère particulier des plans discrets et des substitutions généralisées autorise cependant quelques petits miracles. Arnoux et Ito [AI01] ont montré que l'image des faces d'un plan discret est incluse dans un plan discret (qui n'est pas forcément le même que celui de départ), et Fernique [Fer06] a montré que cette inclusion est en réalité une *égalité* (l'image aurait pu n'être qu'une partie de plan discret).

L'action d'une substitution généralisée se traduit sur le vecteur normal du plan. Plus précisément, l'image du plan discret  $\mathcal{P}_v$  par  $E_1^*(\sigma)$  est égale au plan  $\mathcal{P}_{Mv}$ , où  $M$  est la matrice d'incidence de  $\sigma$ , ce qui est l'objet de la proposition 1.9.

**Lemme 1.8** (Arnoux, Ito [AI01]). *Pour toute face  $[x, i]^*$  de  $\mathcal{P}_v$ , on a  $E_1^*(\sigma)([x, i]^*) \subseteq \mathcal{P}_{Mv}$ .*

*Démonstration.* Soit  $[x, i]^*$  une face de  $\mathcal{P}_v$ . Il faut prouver que pour tout  $k$  tel que  $\sigma(k) = pis$ , la face  $[M^{-1}(x + \ell(s)), k]^*$  est dans  $\mathcal{P}_{Mv}$ . Comme  $\langle M^{-1}(x + \ell(s)), Mv \rangle = \langle MM^{-1}(x + \ell(s)), v \rangle = \langle x + \ell(s), v \rangle$ , cela revient à prouver que

$$0 \leq \langle x + \ell(s), v \rangle < \langle e_k, Mv \rangle.$$

L'inégalité de gauche découle de

$$\langle x + \ell(s), v \rangle = \langle x, v \rangle + \langle \ell(s), v \rangle \geq \langle x, v \rangle \geq 0,$$

car les coordonnées de  $\ell(s)$  et  $v$  sont positives, et  $[x, i]^*$  est dans  $\mathcal{P}_v$ . Pour l'inégalité de droite, on calcule :  $\langle e_k, Mv \rangle = \langle Me_k, v \rangle = \langle \ell(\sigma(k)), v \rangle = \langle \ell(p) + e_i + \ell(s), v \rangle$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle x + \ell(s), v \rangle &= \langle x, v \rangle + \langle \ell(s), v \rangle \\ &< \langle e_i, v \rangle + \langle \ell(p), v \rangle + \langle \ell(s), v \rangle \\ &< \langle e_k, Mv \rangle. \end{aligned}$$

◻

Une conséquence directe du lemme 1.8 est que  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_v) \subseteq \mathcal{P}_{Mv}$ . On prouve maintenant l'inclusion réciproque. Notons que ces résultats ont été généralisés dans le cadre plus général des surfaces discrètes [ABFJ07].

**Proposition 1.9** (Fernique [Fer06]).  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_v) = \mathcal{P}_{Mv}$ .

*Démonstration.* Il faut prouver qu'on obtient bien tout le plan  $\mathcal{P}_{Mv}$  en appliquant  $E_1^*(\sigma)$  à  $\mathcal{P}_v$ . Soit  $[y, k]^*$  une face de  $\mathcal{P}_{Mv}$ , et notons  $\sigma(k) = u_1 \cdots u_m$ . Posons  $x_n = My - \ell(u_{m-n} \cdots u_m)$ . Pour tout  $n \in \{1, \dots, m\}$ , on a  $y = M^{-1}(x_{n-1} + \ell(u_{m-n+1} \cdots u_m))$ , et donc  $[y, k]^*$  est dans  $E_1^*(\sigma)([x_{n-1}, u_{m-n}]^*)$ , pour tout  $n \in \{1, \dots, m\}$ . Il ne reste plus qu'à prouver qu'au moins une des faces  $[x_{n-1}, u_{m-n}]^*$  est dans  $\mathcal{P}_v$ , c'est-à-dire telle que  $0 \leq \langle x_{n-1}, v \rangle < \langle e_{u_{m-n}}, v \rangle$ .

Comme  $[y, k]^*$  est une face de  $\mathcal{P}_{Mv}$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle x_0, v \rangle &= \langle My, v \rangle & \langle x_m, v \rangle &= \langle My - \ell(\sigma(k)), v \rangle \\ &= \langle y, Mv \rangle & &= \langle M(y - e_k), v \rangle \\ &\geq 0 & &= \langle y - e_k, Mv \rangle \\ & & &= \langle y, v \rangle - \langle e_k, Mv \rangle \\ & & &< 0 \end{aligned}$$

Il existe donc  $n$  tel que  $\langle x_n, v \rangle < 0$  et  $\langle x_{n-1}, v \rangle \geq 0$ . Mais alors, puisque  $x_{n-1} = x_n + e_{u_{m-n}}$ , on a :  $0 \leq \langle x_{n-1}, v \rangle = \langle x_n, v \rangle + \langle e_{u_{m-n}}, v \rangle < \langle e_{u_{m-n}}, v \rangle$ , ce qui implique que  $[x_{n-1}, u_{m-n}]^*$  est bien dans  $\mathcal{P}_v$ . ◻

## 2 Engendrer un plan discret

La proposition 1.9 nous dit qu'en appliquant une substitution généralisée à un plan discret, on obtient un plan discret. Que se passe-t-il si on applique la substitution à un motif fini au lieu de l'appliquer à un plan discret tout entier ? Le plus souvent, on obtiendra un autre motif fini, plus gros que celui de départ. La manière dont ces motifs grossissent et leur topologie (leur forme) est l'objet d'étude principal de ce mémoire.



Cette question n'est pas sans liens avec la géométrie discrète : itérer la substitution à partir d'un motif fini donne des parties de plus en plus grandes d'un plan discret, permettant ainsi d'*engendrer* effectivement le plan discret. La forme des motifs que l'on obtient est alors importante : on préférera des motifs connexes en forme de « patatoïde » plutôt que des motifs non connexes constitués de faces éparpillées.

Le but de cette section est de présenter plusieurs stratégies d'engendrement de plans discrets. Nous verrons que la topologie des motifs obtenus varie grandement en fonction de l'approche considérée.

## 2.1 Exploiter le développement en fraction continue du vecteur normal

Il existe de multiples généralisations possibles du développement en fraction continue d'un nombre réel [Bre81, Sch00]. La plupart de ces approches ont en commun de réécrire un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  sous la forme

$$M_1 \cdots M_n v_n = v,$$

où les matrices  $M_i$  sont des matrices unitaires et à coefficients entiers positifs, de manière à ce que les produits  $M_1 \cdots M_n \mathbb{R}^n$  convergent vers la droite de vecteur directeur  $v$ .

Le fait que les coefficients des matrices  $M_i$  soient dans  $\mathbb{N}$  nous intéresse particulièrement. En effet, en choisissant des substitutions  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  dont les matrices d'incidence sont  ${}^tM_1, \dots, {}^tM_n$ , la proposition 1.9 nous dit que  $E_1^*(\sigma_1) \cdots E_1^*(\sigma_n)(\mathcal{P}_{v_n}) = \mathcal{P}_v$ . L'astuce est alors de remarquer que le « cube unité »

$$\mathcal{U} := \cup_{i=1,2,3} [(0,0,0), i]^* = \text{[cube unité]}$$

est inclus dans tout plan discret (à l'origine), ce qui nous donne une suite de motifs finis tous contenus dans  $\mathcal{P}_v$  :

$$E_1^*(\sigma_1) \cdots E_1^*(\sigma_n)(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{P}_v.$$

C'est précisément cette suite de motifs que nous allons étudier dans la suite.

Comme nous le verrons, le choix des matrices  $M_i$  n'est pas canonique, chaque stratégie ayant ses avantages et ses inconvénients. En revanche, dans le cas des droites discrètes<sup>3</sup> ( $n = 2$ ), le développement en fraction continue classique réunit toutes les bonnes propriétés (meilleures approximations rationnelles, vitesse de convergence, etc.).

## 2.2 Quelques stratégies d'engendrement

### 2.2.1 Le cas d'un plan substitutif

Une classe très particulière de plans discrets est celle des plans discrets *substitutifs* : les plans  $\mathcal{P}_v$  pour lesquels il existe une substitution unimodulaire non triviale  $\sigma$  telle que  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_v) = \mathcal{P}_v$ . Cela correspond au cas où les matrices  $M_i$  sont toutes les mêmes, et les motifs approximants sont obtenus en itérant plusieurs fois la même substitution :

$$E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{P}_v.$$

La topologie de ces motifs varie énormément en fonction du choix de  $\sigma$  : ils peuvent être connexes ou non, avec ou sans trous (voir figure 4).

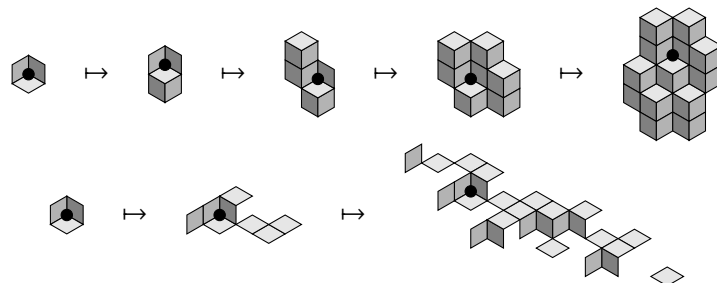


FIGURE 4 – Itérations à partir de  $\mathcal{U}$  de la substitution de Tribonacci (haut), et de la substitution  $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 23, 3 \mapsto 31322$  (bas).

3. Souvent étudiées en tant que *suites sturmiennes* ; voir [Fog02, Lot02].

Il est intéressant ici de se restreindre aux substitutions de *Pisot irréductibles* (voir section 4.2.1 pour une définition), car sinon les motifs croissent selon une seule direction et sont peu intéressants.

On se pose alors la question suivante : la suite de motifs recouvre la *totalité* du plan discret ? (Autrement dit, a-t-on  $\cup_{n \geq 0} E_1^*(\sigma_{B_1, C_1}) \cdots E_1^*(\sigma_{B_n, C_n})(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_v$  ?) La réponse est non si l'on part seulement de  $\mathcal{U}$ . En revanche, il a été prouvé qu'il existe toujours un motif *fini*  $\mathcal{V}$  tel que le plan tout entier est recouvert en itérant  $E_1^*(\sigma)$  à partir de  $\mathcal{V}$  (voir [BR10, chap. 5], où une formule explicite est donnée pour  $\mathcal{V}$ ).

## 2.2.2 Le cas d'un plan quelconque : l'algorithme de Jacobi-Perron

On s'intéresse maintenant à un problème plus pratique, motivé par la géométrie discrète : étant donné un vecteur  $v \in \mathbb{R}^3$  quelconque, engendrer efficacement le plan discret  $\mathcal{P}_v$ . Dans la suite, on se base sur l'algorithme de Jacobi-Perron mais d'autres algorithmes sont tout à fait envisageables, comme par exemple l'algorithme de Brun [Bru58, Fer08].

**L'algorithme.** Soit  $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  un vecteur tel que  $0 < a, b \leq c$ . Le principe de base est le même que l'algorithme d'Euclide : on soustrait  $a$  à  $b$  et  $c$  autant de fois que l'on peut, puis on permute les coordonnées cycliquement en envoyant  $a$  à la fin. Écrivons les choses matriciellement : une itération de l'algorithme de Jacobi-Perron associe à  $v$  le vecteur  $v_1$  tel que  $v = M_{B,C}v_1$ , où

$$\begin{aligned} B &= \lfloor b/a \rfloor & \text{et} & & M_{B,C} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & B \\ 0 & 1 & C \end{pmatrix}. \\ C &= \lfloor c/a \rfloor \end{aligned}$$

Dans la suite, on suppose que  $a, b, c$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , afin de pouvoir itérer l'algorithme indéfiniment. On obtient alors une suite de couples d'entiers  $(B_n, C_n)_{n \geq 1}$ , que l'on appelle le *développement de Jacobi-Perron* de  $v$ . On obtient au passage une suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  de vecteurs vérifiant  $v = M_{B_1, C_1} \cdots M_{B_n, C_n} v_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

**La suite des motifs.** Choisissons maintenant une famille de substitutions ayant  ${}^t M_{B,C}$  comme matrice d'incidence :  $\sigma_{B,C} : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 13^B, 3 \mapsto 23^C$ . À la  $n$ -ième itération, on obtient le motif

$$E_1^*(\sigma_{B_1, C_1}) \cdots E_1^*(\sigma_{B_n, C_n})(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{P}_v.$$

Nous verrons dans la section 3.4 que tous ces motifs sont simplement connexes (c'est à dire connexes et sans trous ; voir figure 5), en utilisant des arguments déjà présents dans [IO94]. Ce résultat est aussi prouvé dans [BLPP] avec des méthodes différentes (étude de l'action de  $E_2^*$  sur les mots de contour des motifs).

Ito et Ohtsuki [IO94] ont aussi donné une condition nécessaire et suffisante sur les  $(B_n, C_n)$  pour que cette suite de motifs recouvre la totalité du plan discret en partant de  $\mathcal{U}$  (c'est-à-dire pour que  $\cup_{n \geq 1} E_1^*(\sigma_{B_1, C_1}) \cdots E_1^*(\sigma_{B_n, C_n})(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_v$ ). Ils ont aussi prouvé que, dans le cas où la condition sur les  $(B_n, C_n)_{n \geq 1}$  n'est pas vérifiée, on peut quand même engendrer tout le plan en partant du motif  $\mathcal{V} = \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$ . (Remarquons que l'on a mentionné un résultat analogue pour les plans substitutifs, sauf qu'ici le motif  $\mathcal{V}$  est simple et ne dépend d'aucun paramètre.)

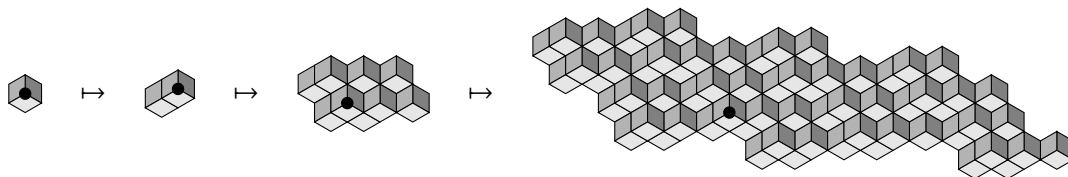


FIGURE 5 – Approximations successives du plan de vecteur normal  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{\pi})$  par l'algorithme de Jacobi-Perron.

**Et en pratique ?** Jusqu'alors, on a supposé que les coordonnées de  $v$  étaient linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ . En pratique, on s'intéressera plutôt à vecteur dont les coordonnées sont entières ou rationnelles, ce qui nous pose un problème car on ne peut alors pas itérer l'algorithme indéfiniment. Ce problème est traité dans [BLPP] où l'algorithme est adapté à tous les cas de figure, ce qui donne notamment lieu des recouvrement périodiques de plans discrets par un même motif dans le cas où les coordonnées sont toutes rationnelles.

**Liens avec le cas substitutif ; périodicité.** Bien que l'algorithme de Jacobi-Perron permette d'engendrer *n'importe quel* plan discret, on ne peut pas dire que l'étude des motifs engendrés cette approche est « plus générale » que l'étude des motifs engendrés dans le cas substitutif. En effet, si  $\mathcal{P}_v$  est substitutif, alors l'algorithme de Jacobi-Perron permet bien sûr d'engendrer  $\mathcal{P}_v$ , mais rien ne garantit que le développement de Jacobi-Perron de  $v$  soit périodique ou que la forme des motifs soit la même, et c'est faux dans la plupart des cas.

Cette question est liée à de profonds problèmes ouverts en théorie des fractions continues multidimensionnelles : quels sont les vecteurs ayant un développement de Jacobi-Perron périodique ? Existe-t-il un algorithme de fractions continue qui caractérise les vecteurs  $v$  dont les coordonnées appartiennent à une même extension cubique de  $\mathbb{Q}$  ? C'est pour répondre à ces question que Jacobi a introduit cet algorithme [Jac68], afin de généraliser le (magnifique) théorème de Lagrange, qui affirme que le développement en fraction continue d'un réel  $x$  est ultimement périodique si et seulement si  $x$  est un nombre quadratique.

### 2.2.3 Substitutions d'Arnoux-Rauzy

Les substitutions d'Arnoux-Rauzy, définies par

$$\text{ar}_1 : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 31 \end{cases}, \quad \text{ar}_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 32 \end{cases}, \quad \text{ar}_3 : \begin{cases} 1 \mapsto 13 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases},$$

ont été introduites dans le cadre de l'étude d'une variante des suites sturmiennes : les suites *épisturmiennes*, qui au lieu d'être de complexité  $n + 1$  comme les suites sturmiennes sont par définition les suites de complexité  $2n + 1$  [AR91].

Ces substitutions ont fait l'objet de nombreuses autres études [Fog02, GJ09], et leurs représentations géométriques ont été considérées dans [CFZ00, CFM08]. Nous prouverons dans la section 3.3 que les approximations associées à ces substitutions sont simplement connexes (voir figure 6).

### 2.2.4 Substitutions élémentaires

Une substitution élémentaire est une substitution dont la matrice d'incidence contient des 1 sur la diagonale, exactement un autre 1, et des 0 partout ailleurs. Il existe douze telles substitutions ; elles sont données par

$$\varepsilon_{i,j} : \begin{cases} j \mapsto ij \\ k \mapsto k \text{ if } k \neq j \end{cases} \quad \tilde{\varepsilon}_{i,j} : \begin{cases} j \mapsto ji \\ k \mapsto k \text{ if } k \neq j \end{cases},$$

pour  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  et  $i \neq j$ . Les substitutions élémentaires sont une généralisation des substitutions d'Arnoux-Rauzy, puisque chaque substitution d'Arnoux-Rauzy est un produit de deux substitutions élémentaires :

$$\text{ar}_1 = \tilde{\varepsilon}_{1,2}\tilde{\varepsilon}_{1,3}, \quad \text{ar}_2 = \varepsilon_{2,1}\tilde{\varepsilon}_{2,3}, \quad \text{ar}_3 = \varepsilon_{3,1}\varepsilon_{3,2}.$$

Dans le cas des droites discrètes, il a été prouvé que les approximations associées à un produit de substitutions élémentaires sont connexes [BEIR07]. (On a alors des unions de segments unité au lieu des faces.) Une question est de savoir si le même résultat se généralise aux plans discrets. Un contre-exemple a été trouvé pendant ce stage, par expérimentation numérique<sup>4</sup> : soit la substitution définie par

$$\varepsilon_{1,2}\varepsilon_{3,1}\varepsilon_{2,3}\varepsilon_{1,3} : \begin{cases} 1 \mapsto 31 \\ 2 \mapsto 12 \\ 3 \mapsto 31123 \end{cases}.$$

4. À l'aide du logiciel sage : <http://www.sagemath.org>.

Cet exemple (figure 6) est particulièrement intéressant, car son fractal de Rauzy (qui sera défini dans la section 4) n'est pas non plus connexe (voir figure 12). La preuve de non-connexité du fractal et des approximations fait intervenir la notion de *graphe de frontière* ; voir [ST] pour plus de détails.

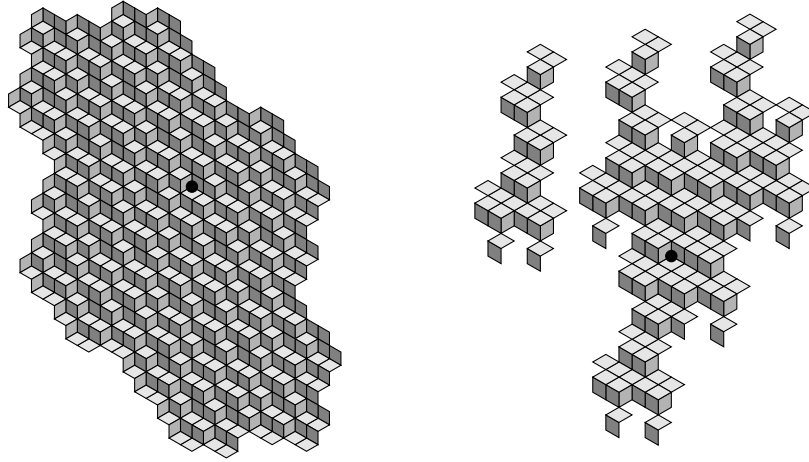


FIGURE 6 – Le motif  $E_1^*(ar_1ar_2ar_3)^3(\mathcal{U})$  (à gauche), et le motif  $E_1^*(\varepsilon_{1,2}\varepsilon_{3,1}\varepsilon_{2,3}\varepsilon_{1,3})^4(\mathcal{U})$  (à droite).

### 2.3 Que se passe-t-il à la limite ?

En itérant des substitutions à partir de  $\mathcal{U}$ , on obtient une suite d'ensembles dont la taille tend vers l'infini. Dans le cas substitutif où la substitution est Pisot irréductible (voir 4.2.1 pour une définition), il est possible de renormaliser chaque approximation de manière à obtenir une suite *convergente* de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$ . C'est ainsi que l'on obtient les *fractals de Rauzy*, qui sont définis dans [AI01] comme la limite d'une telle suite.

Leurs propriétés topologiques sont naturellement reliées aux propriétés topologiques des motifs approximants ; tout cela est développé en détail dans la section 4.

## 3 Preuves combinatoires de connexité

Le but de cette section est de développer des techniques afin de prouver la connexité et la simple connexité des motifs engendrés par certaines familles de substitutions. L'approche sera de démontrer que les motifs sont connexes par « arcs de faces », où les « arcs » sont des chemins constitués de faces unité concaténées (notion de *couverture*), puis de prouver que cette propriété est parfois conservée lorsque l'on applique la substitution (notion de *stabilité*).

Nous en déduirons la simple connexité des motifs associés aux substitutions d'Arnoux-Rauzy. Ce résultat a été conjecturé dans [Can03], et sera bientôt soumis pour publication [BJS]. Il sera aussi présenté au workshop *Substitutive Tilings and Fractal Geometry* en juillet 2010 à Canton, en Chine.

Nous donnerons ensuite un autre exemple d'application des méthodes présentées, en prouvant la simple connexité des motifs associés aux substitutions de Jacobi-Perron (un résultat déjà présent dans [IO94]).

### 3.1 Couverture par une famille de motifs et stabilité

On appelle un *motif* une union finie (et incluse dans un plan discret) de faces unité  $[x, i]^*$ , où  $x \in \mathbb{Z}^3$  et  $i = 1, 2, 3$ . Le but de la définition suivante est de formaliser une notion de connexité pour ensemble constitué de faces unité, relativement à une famille de motifs  $\mathcal{L}$ . L'idée est de requérir que tout couple de faces soit relié par un « chemin » de motifs de  $\mathcal{L}$ , dont tous les motifs consécutifs partagent au moins une face. Cette notion a initialement été introduite par Ito et Ohtsuki dans [IO93, IO94].

**Définition 3.1** ( $\mathcal{L}$ -couverture). Soient  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  un motif, et  $\mathcal{L}$  un ensemble de motifs. Une  $\mathcal{L}$ -chaîne d'une face  $e \subseteq D$  à une face  $f \subseteq D$  est une suite de motifs  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{L}^n$  vérifiant

- $e \subseteq p_1$  et  $f \subseteq p_n$ ;
  - $p_k$  et  $p_{k+1}$  ont au moins une face en commun, pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ;
  - $p_k \subseteq D$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ .
- On dit que  $D$  est  $\mathcal{L}$ -couvert si pour tout  $e, f \subseteq D$ , il existe une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $e$  à  $f$ .

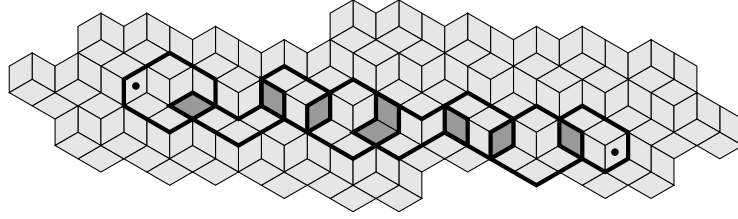


FIGURE 7 – Exemple d’une  $\mathcal{L}$ -chaîne. Le gris foncé indique l’intersection entre deux motifs.

Le lemme suivant dit simplement que les  $\mathcal{L}$ -chaînes d’un motif  $D$  sont stables par concaténation.

**Lemme 3.2.** Soient  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  un motif,  $\mathcal{L}$  un ensemble de motifs, et  $e, f, g$  trois faces de  $D$ . S’il existe une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $e$  à  $f$  et une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $f$  à  $g$ , alors il existe une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $e$  à  $g$ .

*Démonstration.* Soient  $(p_1, \dots, p_n)$  une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $e$  à  $f$ , et  $(q_1, \dots, q_m)$  une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $f$  à  $g$ . Alors, une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $e$  à  $g$  est donnée par  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m)$ , car  $f \subseteq p_n \cap q_1$ .  $\square$

On arrive maintenant à la définition qui nous permet de formaliser le lien entre la couverture par un ensemble de motifs et l’application d’une substitution généralisée.

**Définition 3.3** (Stabilité). Soit  $\Sigma$  une substitution généralisée. Un ensemble de motifs  $\mathcal{L}$  est *stable* par  $\Sigma$  si  $\Sigma(p)$  est  $\mathcal{L}$ -couvert pour tout  $p \in \mathcal{L}$ .

La stabilité d’un ensemble de motifs par une règle est très intéressante, car la  $\mathcal{L}$ -couverture d’un ensemble  $\mathcal{L}$ -couvert est conservée par l’application de  $\Sigma$  si  $\mathcal{L}$  est stable par  $\Sigma$ , comme l’illustre la proposition 3.4. Cela permet de prouver la  $\mathcal{L}$ -couverture d’une famille d’ensembles obtenus par itération de  $\Sigma$  en se ramenant à la vérification de la stabilité de  $\mathcal{L}$  par  $\Sigma$ , qui est une propriété facilement (algorithmiquement !) vérifiable car le nombre de motifs dans  $\mathcal{L}$  est fini. On arrive ainsi à « concentrer » la difficulté d’une preuve dans cette vérification algorithmique, mais *trouver* un tel ensemble stable reste en général difficile.

**Proposition 3.4.** Soit  $\mathcal{L}$  un ensemble de motifs stable par une substitution généralisée  $\Sigma$ . Si  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  est  $\mathcal{L}$ -couvert, alors  $\Sigma(D)$  est  $\mathcal{L}$ -couvert.

*Démonstration.* Soient  $f$  et  $f'$  deux faces de  $\Sigma(D)$ . Pour prouver que  $\Sigma(D)$  est  $\mathcal{L}$ -couvert, il faut construire une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $f$  à  $f'$ . Soient  $e$  et  $e'$  deux faces de  $D$  telles que  $f \subseteq \Sigma(e)$  et  $f' \subseteq \Sigma(e')$ . Comme  $D$  est  $\mathcal{L}$ -couvert, il existe une  $\mathcal{L}$ -chaîne  $(p_1, \dots, p_n)$  de  $e$  à  $e'$ . Pour tout  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ , soit  $f_k$  une face de  $\Sigma(p_k \cap p_{k+1})$ , et notons  $f_1 = f, f_n = f'$ .

Pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , il existe une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $f_k$  à  $f_{k+1}$ , car  $f_k$  et  $f_{k+1}$  sont dans  $\Sigma(p_{k+1})$  et  $\mathcal{L}$  est stable par  $\Sigma$ . Selon le lemme 3.2, la concaténation des  $\mathcal{L}$ -chaînes de  $f_k$  à  $f_{k+1}$  nous donne donc une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $f$  à  $f'$ .  $\square$

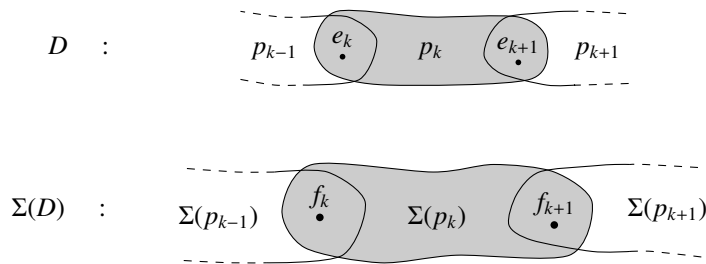


FIGURE 8 – Preuve de la proposition 3.4.

### 3.2 Connexité, simple connexité, et $\mathcal{L}$ -couverture

On tire maintenant parti de la notion de  $\mathcal{L}$ -couverture afin de prouver des propriétés de connexité des motifs. La proposition suivante établit le lien entre la connexité d'un ensemble  $\mathcal{L}$ -couvert et la connexité des motifs de  $\mathcal{L}$ .

**Proposition 3.5.** Soient  $\mathcal{L}$  un ensemble de motifs, et  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  un motif  $\mathcal{L}$ -couvert. Si  $p$  est connexe par arcs pour tout  $p \in \mathcal{L}$ , alors  $D$  est connexe par arcs.

*Démonstration.* Soient  $x, y \in D$  et  $e, f \subseteq D$  deux faces telles que  $x \in e$  et  $y \in f$ , et soit  $(p_1, \dots, p_n)$  une  $\mathcal{L}$ -chaîne de  $e$  à  $f$ . Comme les  $p_i$  sont connexes par arcs et que  $p_i \cup p_{i+1} \neq \emptyset$  pour tout  $i$ , il existe un arc de  $x \in p_1$  à  $y \in p_n$ .  $\square$

**Simple connexité.** On introduit maintenant la notion qui formalise le fait de « ne pas avoir de trous ». Un ensemble  $D$  est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs, et si toute courbe fermée peut être continuellement déformée en un point.

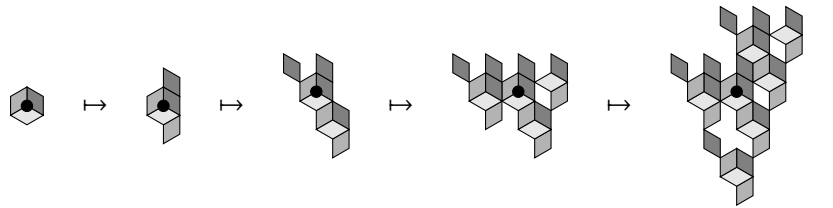
Dans le cas où  $D$  est obtenu en itérant des substitutions généralisées, il est possible de prouver, sous certaines hypothèses, que  $D$  est simplement connexe. Notons  $\mathcal{L}_2$  l'ensemble de tous les motifs constitués de deux faces partageant une arête. Dire qu'un ensemble est  $\mathcal{L}_2$ -couvert revient à dire qu'il est « connexe par arcs de faces contiguës ».

**Proposition 3.6.** Soient  $\sigma$  une substitution unimodulaire et  $n \geq 0$ . Si l'ensemble  $E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{U})$  est  $\mathcal{L}_2$ -couvert, alors il est simplement connexe.

*Esquisse de démonstration.* L'observation clé est de voir que le plan discret  $\mathcal{P}_{(1,1,1)}$  est entièrement constitué de translations du motif  $\mathcal{U}$ . La proposition 1.9 nous dit que l'image de  $\mathcal{P}_{(1,1,1)}$  par  $E_1^*(\sigma)^n$  est de nouveau un plan discret. De plus, la proposition 1.7 nous permet d'affirmer que les images par  $E_1^*(\sigma)^n$  des occurrences de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{P}_{(1,1,1)}$  sont deux-à-deux disjointes (ne partagent aucune face unité).

On obtient ainsi un *pavage* du plan par les motifs  $E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{U})$  (modulo une projection sur  $\mathcal{P}_{(1,1,1)}$ ), et comme ceux-ci ne se recouvrent pas et sont tous identiques, ils ne peuvent pas contenir de « trou » car il serait vide, ce qui est une contradiction car les motifs recouvrent tout le plan. Il s'agit d'un résultat classique de la théorie des pavages ; voir [GS87] pour plus de détails.  $\square$

On pourrait être tenté de remplacer «  $\mathcal{L}_2$ -couvert » par « connexe » dans les hypothèses de la proposition, en pensant que l'argument de pavage ci-dessus marche toujours. L'exemple de la substitution  $\sigma : 1 \mapsto 21, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$  montre que ce n'est pas possible :



Ceci s'explique par le fait que les motifs peuvent en fait se superposer (mais sur un ensemble de mesure nulle seulement), ce qui permet dans ce cas à un motif de « boucher les trous » de ses voisins dans le pavage.

### 3.3 Application aux approximations d'Arnoux-Rauzy

On note les substitutions généralisées d'Arnoux-Rauzy  $AR_i := E_1^*(ar_i)$ , pour  $i = 1, 2, 3$  :

$$AR_1 : \begin{cases} \text{motif } 1 \mapsto \text{motif } 1 \\ \text{motif } 2 \mapsto \text{motif } 2 \\ \text{motif } 3 \mapsto \text{motif } 3 \end{cases} \quad AR_2 : \begin{cases} \text{motif } 1 \mapsto \text{motif } 1 \\ \text{motif } 2 \mapsto \text{motif } 2 \\ \text{motif } 3 \mapsto \text{motif } 3 \end{cases} \quad AR_3 : \begin{cases} \text{motif } 1 \mapsto \text{motif } 1 \\ \text{motif } 2 \mapsto \text{motif } 2 \\ \text{motif } 3 \mapsto \text{motif } 3 \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{L}_{AR}$  l'ensemble de motifs donné par

$$\mathcal{L}_{AR} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} \end{array} \right\}.$$

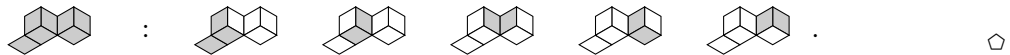
(Cette représentation ne montre les motifs qu'à une translation près, mais on requiert en fait  $\mathcal{L}_{AR}$  contienne toutes les translations par  $\mathbb{Z}^3$  de chaque motif.)

**Proposition 3.7.** L'ensemble de motifs  $\mathcal{L}_{AR}$  est stable par les substitutions généralisées  $AR_1$ ,  $AR_2$ , et  $AR_3$ .

$$\begin{aligned} AR_1(\mathcal{L}_{AR}) &= \left\{ \begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} \end{array} \right\} \\ AR_2(\mathcal{L}_{AR}) &= \left\{ \begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} \end{array} \right\} \\ AR_3(\mathcal{L}_{AR}) &= \left\{ \begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} & \begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

FIGURE 9 – Stabilité de  $\mathcal{L}_{AR}$  par les règles  $AR_1$ ,  $AR_2$  et  $AR_3$ .

*Démonstration.* Cette proposition se démontre en regardant chaque motif de l'un des ensembles  $AR_i(\mathcal{L}_{AR})$ , et en vérifiant qu'il est bien recouvert par des motifs de  $\mathcal{L}_{AR}$ ; voir figure 9. Voici un exemple d'un tel recouvrement :

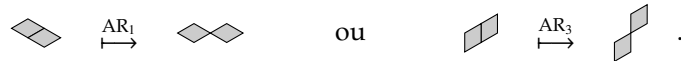


On arrive au théorème principal de cette section.

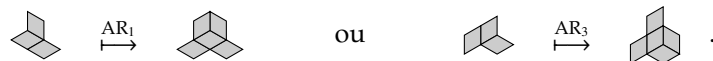
**Théorème 3.8.** Le motif  $AR_{i_1} \cdots AR_{i_n}(\mathcal{U})$  est simplement connexe, pour tout  $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, 3\}$ .

*Démonstration.* La proposition 3.4 implique que  $AR_{i_1} \cdots AR_{i_n}(\mathcal{U})$  est  $\mathcal{L}_{AR}$ -couvert, car  $\mathcal{L}_{AR}$  est stable par les  $AR_i$  (proposition 3.7) et le motif de départ  $\mathcal{U}$  est  $\mathcal{L}_{AR}$ -couvert. Comme tous les motifs de  $\mathcal{L}_{AR}$  sont  $\mathcal{L}_2$ -couverts, la proposition 3.6 nous permet de conclure que  $AR_{i_1} \cdots AR_{i_n}(\mathcal{U})$  est simplement connexe.  $\square$




**À propos de  $\mathcal{L}_{AR}$ .** L'ensemble de motifs  $\mathcal{L}_{AR}$  a été trouvé en regardant d'abord tous les motifs de deux faces partageant une arête, mais ce n'était pas suffisant, car cet ensemble n'est pas stable, comme le montre par exemple :



Le problème se situe au niveau des motifs constitués de deux faces identiques. L'issue a été de remarquer que si l'on rajoute une face à chacun de ces motifs, alors l'image de la nouvelle face va « boucher le trou » :



On a donc obtenu ainsi un jeu de motifs stable en augmentant la taille des motifs de départ. Ce nouveau jeu de motifs aurait tout à fait pu ne pas être stable *a priori*, on peut donc se considérer chanceux qu'il le soit.

Tout cela se traduit par le fait que lorsque l'on applique des règles  $AR_i$  en partant du cube unité, le motif  apparaît *toujours* collé à la face  de la manière suivante . (Et de même pour les autres motifs de deux faces identiques partageant une arête.)

### 3.4 Application aux approximations de Jacobi-Perron

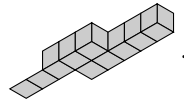
On souhaite maintenant prouver la simple connexité des approximations associées à l'algorithme de Jacobi-Perron. La preuve est très similaire à ce qui a été fait pour les substitutions d'Arnoux-Rauzy, mais le jeu stable  $\mathcal{L}_{JP}$  de motifs est plus simple :






$$\mathcal{L}_{JP} = \left\{ \begin{array}{c} \text{[diamond]} \\ \text{[diamond]} \\ \text{[diamond]} \\ \text{[diamond]} \\ \text{[diamond]} \\ \text{[diamond]} \\ \text{[diamond]} \end{array} \right\}.$$

**Théorème 3.9** (Ito, Ohtsuki [IO94]). *Si  $(B_n, C_n)_{n \geq 1}$  est une suite de coefficients obtenue par l'algorithme de Jacobi-Perron, alors le motif  $E_1^*(\sigma_{B_1, C_1}) \cdots E_1^*(\sigma_{B_n, C_n})(\mathcal{U})$  est simplement connexe pour tout  $n \geq 1$ .*

La différence principale avec la preuve du théorème 3.8 est que l'on a ici une famille infinie de substitutions, car les  $(B_n, C_n)$  ne sont *a priori* pas bornés. Cependant, les images des motifs de  $\mathcal{L}_{JP}$  sont tous de la même forme, et il est facile de prouver le recouvrement de chaque image.

*Démonstration.* Regardons par exemple l'image du motif  par  $E_1^*(\sigma_{3,5})$  :








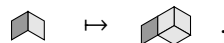
Les deux occurrences de cube unité sont recouvertes par les motifs  et . Toutes les faces de type 3 sont recouvertes par les motifs  et , et les faces de type 2 sont recouvertes par le motif  (ces deux dernières assertions requièrent une petite récurrence dans le cas général). De la même manière, on démontre que les six autres images des motifs de  $\mathcal{L}_{JP}$  sont  $\mathcal{L}_{JP}$ -couvertes (l'exemple choisi est représentatif).

Les sept motifs de  $\mathcal{L}_{JP}$  sont  $\mathcal{L}_2$ -couverts, donc la proposition 3.6 nous permet de conclure la simple connexité du motif  $E_1^*(\sigma_{B_1, C_1}) \cdots E_1^*(\sigma_{B_n, C_n})(\mathcal{U})$  pour tout  $n \geq 0$ . ◻

### 3.5 Liens avec les règles de concaténation

Les *règles de concaténation*<sup>5</sup> sont un moyen de définir une substitution généralisée en calculant l'image d'un motif par *concaténation* des images de chaque face : on souhaite généraliser la concaténation unidimensionnelle  $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$  à des motifs de faces. Au lieu de calculer les nouvelles coordonnées  $M^{-1}x$  de l'image d'une face  $[x, i]^*$ , on place celle-ci par rapport aux images précédemment calculées.

Par exemple, les images des motifs  et  par  $AR_1$  sont respectivement  et , mais l'on ne sait pas comment positionner un des deux motifs par rapport à l'autre pour obtenir l'image du motif  par concaténation seulement, sans calculer l'image du motif entier par  $AR_1$ . On peut alors donner alors la règle de concaténation suivante :



(Les couleurs servent à distinguer les deux images.) Cette règle coïncide bien avec ce que l'on aurait obtenu en appliquant  $AR_1$ , mais là est tout l'intérêt : il est possible de complètement décrire  $AR_1$  en donnant un nombre *fini* de telles règles de concaténation, qui sont *stables* si l'on part du cube unité. (Le terme « stable » signifiant ici que les motifs de concaténation donnés par les règles sont recouverts par l'ensemble des motifs à deux faces de départ, ce qui permet d'itérer la règle.) Pour plus de détails sur cette notion, voir [ABI02, ABS04, Fer07a].

La notion de  $\mathcal{L}$ -couverture est proche de celle de règle de concaténation. La différence est que l'on omet l'aspect « engendrement » en ne considérant que la couverture, et que l'on s'autorise des motifs

5. Souvent appelées « règles locales », mais cette terminologie peut porter à confusion : il ne s'agit pas ici des règles locales couramment utilisées dans le domaine des pavages ou en dynamique symbolique avec les sous-shifts de type fini.



finis arbitrairement grands, au lieu de se restreindre aux motifs à deux faces. Cela nous a suffi pour démontrer la connexité des approximations d'Arnoux-Rauzy, mais exploiter une structure plus riche permettra peut-être d'obtenir de nouvelles propriétés.

## 4 Le fractal associé à une substitution

Lorsqu'une substitution vérifie certaines propriétés (détaillées dans la section 4.2.1), alors il est possible de lui associer un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  (appelé *fractal*<sup>6</sup> de Rauzy), qui est compact et dont la frontière est fractale. Le but de cette section est de définir cet ensemble fractal, en le voyant comme la limite de la suite renormalisée des ensembles  $E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{U})$ .

Nous étudierons ensuite les liens qui existent entre les propriétés topologiques d'un fractal et les propriétés topologiques de ses approximations, puis nous prouverons la connexité de certaines familles de fractals en appliquant les résultats de la section 3.

La première apparition d'un tel fractal (celui associé à la substitution de Tribonacci) est due à Rauzy [Rau82]. Depuis, beaucoup d'énergie a été déployée afin d'étudier les propriétés de ces fractals. Ils vérifient des propriétés d'auto-similarité, et offrent des représentations géométriques de certains systèmes dynamiques symboliques associés à une substitution, en généralisant les échanges d'intervalles à des échanges de morceaux du plan. Voir [Fog02] et [BR10, chap. 5] pour plus de détails.

### 4.1 Rappels topologiques

On se donne maintenant un cadre topologique dans le but de pouvoir donner une définition des fractals de Rauzy. On va définir l'espace dans lequel « vivent » les fractals (l'ensemble des compacts de  $\mathbb{R}^2$ ), et définir une distance sur cet ensemble de manière à ce qu'il devienne un espace métrique complet. On aura alors un critère pratique de convergence, grâce auquel un fractal pourra être défini comme étant la limite d'une suite convergente de compacts de  $\mathbb{R}^2$ .

On note  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  l'ensemble de tous les compacts de  $\mathbb{R}^2$ , et on munit  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  de la *distance de Hausdorff*  $d_H$ , définie par

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq \mathcal{V}_\varepsilon(B) \text{ et } B \subseteq \mathcal{V}_\varepsilon(A)\},$$

où  $\mathcal{V}_\varepsilon(X)$  désigne l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  dont la distance à  $X$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon$ . Intuitivement, deux ensembles sont proches pour  $d_H$  si leur forme est similaire et s'ils ne sont éloignés. On appelle *limite de Hausdorff* une limite d'une suite convergente pour  $d_H$  dans  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ .

Remarquons qu'on travaille dans  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ ; la restriction aux ensembles compacts n'est pas anodine : si on s'autorisait toutes les parties de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $d_H$  ne serait plus une distance, et il n'y aurait plus unicité de la limite. Par exemple, un ensemble ouvert et son adhérence sont à distance nulle, et peuvent être deux limites distinctes d'une même suite.

**Espaces complets et suites de Cauchy.** Dans un espace métrique  $(X, d)$ , les *suites de Cauchy* sont les suites dont les termes deviennent arbitrairement proches à partir d'un certain rang. Parmi toutes les suites, ce sont donc les seules susceptibles de converger vers une limite. Le seul « obstacle » à la convergence d'une suite de Cauchy serait que celle-ci « converge » vers un point qui n'appartient pas à  $X$ , comme par exemple une suite de  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  dont la limite dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  est  $\sqrt{2}$ . On dit donc qu'un espace métrique est *complet* si toutes ses suites de Cauchy sont convergentes.

L'avantage de travailler dans un espace complet est qu'il suffit alors de prouver qu'une suite est de Cauchy pour prouver qu'elle admet une limite. C'est la manière dont nous prouverons l'existence de l'ensemble fractal associé à une substitution dans la section 4.2, grâce à la complétude de l'espace métrique  $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_H)$ .

**Proposition 4.1.** *L'espace métrique  $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_H)$  est complet.*

Pour une preuve, voir les livres [Bar93] ou [Fal03]. Le lemme suivant nous sera utile dans la preuve de convergence des approximations d'un fractal vers le fractal.

**Lemme 4.2.** *Soient  $A, B, C, D$  des compacts de  $\mathbb{R}^2$ . Alors*

$$d_H(A \cup B, C \cup D) \leq \max(d_H(A, C), d_H(B, D)).$$

6. On dit habituellement *une* fractale en français, mais l'usage du terme « fractal » s'est imposé dans le domaine.

## 4.2 Définition du fractal

Nous sommes maintenant prêts à donner une définition du fractal de Rauzy, à la manière d'Arnoux et Ito [AI01]. D'autres constructions équivalentes existent (voir par exemple [Rau82, CS01]).

### 4.2.1 Hypothèses sur la substitution

La substitution  $\sigma$  doit vérifier certaines propriétés si on veut pouvoir lui associer un ensemble fractal. En suivant les traces d'Arnoux et Ito [AI01], nous nous restreindrons aux substitutions unimodulaires et Pisot irréductibles.

**Substitutions Pisot irréductibles.** Une substitution  $\sigma$  est *Pisot irréductible* si la matrice d'incidence  $M$  de  $\sigma$  admet une valeur propre  $\beta > 1$  réelle telle que ses racines conjuguées sont de module strictement inférieur à 1, et si le polynôme caractéristique de  $M$  est irréductible (c'est-à-dire que le degré algébrique de  $\beta$  est égal au nombre de lettre de l'alphabet).

**Plan contractant.** Soit  $\sigma$  une substitution sur  $\{1, 2, 3\}$  unimodulaire et Pisot irréductible, et soit  $M$  la matrice d'incidence de  $\sigma$ . Comme  $\sigma$  est Pisot irréductible,  $M$  admet une valeur propre  $\beta > 1$  réelle, et deux autres valeurs propres  $\beta', \beta'' \in \mathbb{C}$  telles que  $|\beta'| < 1$  et  $|\beta''| < 1$ . On note  $u_\beta$  un vecteur propre de  $M$  associé à  $\beta$ , et  $v_\beta$  un vecteur propre à coordonnées strictement positives de  ${}^tM$  associé à  $\beta$  (vecteur propre « à gauche »). L'existence d'un tel vecteur (à coordonnées *strictement positives*) est assurée par le théorème de Perron-Frobenius, qui s'applique bien car toute substitution Pisot irréductible est primitive [CS01].

Le *plan contractant*  $\mathbb{P}$  associé à  $M$  est le plan de vecteur normal  $v_\beta$ . On note  $\pi_c$  la projection de  $\mathbb{R}^3$  sur le plan contractant  $\mathbb{P}$ , parallèlement au vecteur  $u_\beta$ . Ce plan est invariant par  $M$ . En effet, si  $u \in \mathbb{P}$  (c'est-à-dire si  $\langle v_\beta, u \rangle = 0$ ), alors

$$\langle v_\beta, Mu \rangle = \langle {}^tM v_\beta, u \rangle = \beta \langle v_\beta, u \rangle = 0.$$

Il est facile de voir que le plan contractant est le plan engendré par les deux autres vecteurs propres  $u_{\beta'}$  et  $u_{\beta''}$  de  $M$ . La restriction de  $M$  à ce plan est donc une *contraction*, puisque les valeurs propres de  $\beta'$  et  $\beta''$  sont de module strictement inférieur à 1. En effet, si  $x = au_{\beta'} + bu_{\beta''} \in \mathbb{P}$ , alors

$$\|Mx\| = \|M(au_{\beta'} + bu_{\beta''})\| = \|\beta' au_{\beta'} + \beta'' bu_{\beta''}\| < \|x\|.$$

### 4.2.2 Approximations du fractal

Soit  $\sigma$  une substitution unimodulaire et Pisot irréductible. On renormalise les motifs  $E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{U})$  on les projette sur  $\mathbb{P}$  selon  $\pi_c$ , puis en appliquant  $M$ , qui agit comme une contraction sur  $\mathbb{P}$  (voir figure 10). On appelle  $\mathcal{D}_n$  la  $n$ -ième approximation du fractal associée à  $\sigma$ , définie par

$$\mathcal{D}_n := M^n \pi_c(E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{U})).$$

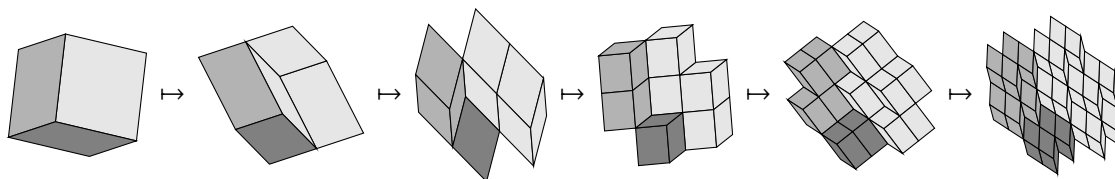


FIGURE 10 – Les premières approximations du fractal associé à la substitution de Tribonacci. À comparer avec la figure 4 pour voir l'effet de la projection et de la renormalisation.

### 4.2.3 Convergence des approximations

On peut identifier le plan contractant  $\mathbb{P}$  à  $\mathbb{R}^2$ , de manière à voir  $\mathcal{D}_n$  comme un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . On prouve maintenant la convergence des approximations  $\mathcal{D}_n$  dans  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ , vers une limite que l'on définira comme le fractal de Rauzy (définition 4.4).

**Proposition 4.3** (Arnoux, Ito [AI01]). *La suite des approximations  $(\mathcal{D}_n)_{n \geq 0}$  est convergente dans l'espace métrique  $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_H)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\beta'$  est la deuxième plus grande valeur propre de  $M$ . Si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles du plan contractant, alors  $d_H(MA, MB) \leq |\beta'| \cdot d_H(A, B)$ . Posons

$$c = \max_{i=1,2,3} d_H(\pi_c([0, i]^*), M\pi_c(E_1^*(\sigma)([0, i]^*))).$$

Comme les approximations sont des unions de faces unité, le lemme 4.2 nous dit que

$$d_H(\pi_c(E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{U})), M\pi_c(E_1^*(\sigma)^{n+1}(\mathcal{U}))) \leq c,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} d_H(\mathcal{D}_n, \mathcal{D}_{n+1}) &\leq d_H(M^n \pi_c(E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{U})), M^{n+1} \pi_c(E_1^*(\sigma)^{n+1}(\mathcal{U}))) \\ &\leq |\beta'|^n \cdot d_H(\pi_c(E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{U})), M\pi_c(E_1^*(\sigma)^{n+1}(\mathcal{U}))) \\ &\leq |\beta'|^n \cdot c. \end{aligned}$$

Comme  $|\beta'| < 1$ , la suite  $(\mathcal{D}_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_H)$ , et donc est convergente car  $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_H)$  est complet.  $\square$

**Définition 4.4** (Fractal de Rauzy). Soit  $\sigma$  une substitution unimodulaire et Pisot irréductible. Le *fractal de Rauzy* associé à  $\sigma$  est la limite de Hausdorff des approximations  $(\mathcal{D}_n)_{n \geq 0}$ .

**Exemple 4.5.** Un aperçu de quelques fractals est donné dans la figure 11. Le fractal de gauche est un exemple de fractal connexe et simplement connexe. Les deux autres fractals sont connexes, mais ne sont pas simplement connexes. Un exemple de fractal non connexes est donné dans la figure 12.

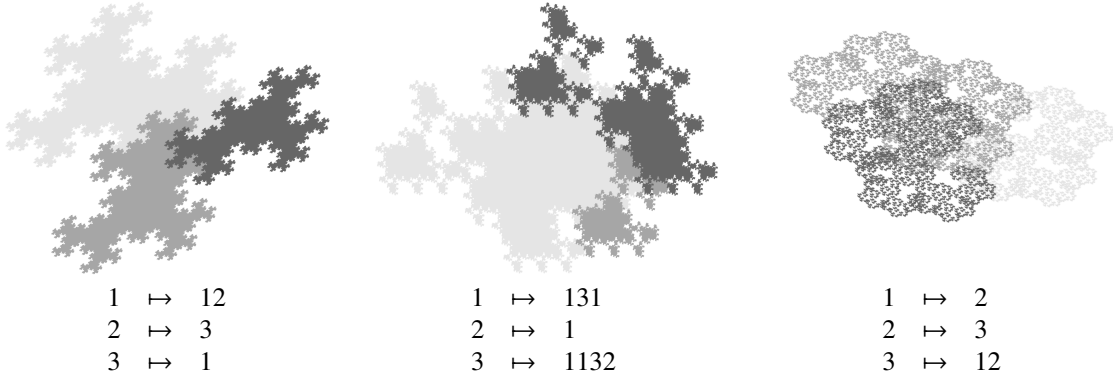


FIGURE 11 – Aperçu de quelques fractals de Rauzy. Les couleurs permettent de distinguer les images de chacune des trois faces du cube de départ.

### 4.3 Liens entre les propriétés topologiques d'un fractal et de ses approximations

Les propriétés topologiques des fractals de Rauzy sont l'objet de nombreux travaux [Can03, CS01, ST]. On se propose maintenant de prouver la connexité de certains fractals, à partir des résultats combinatoires obtenus dans la section 3. La proposition suivant nous permet de passer de la connexité des approximations à la connexité du fractal.

**Proposition 4.6.** *Soit  $K_1, K_2, \dots$  une suite de compacts de  $\mathbb{R}^2$  admettant une limite de Hausdorff  $K$ . Si tous les  $K_n$  sont connexes, alors  $K$  est connexe.*

*Démonstration.* Supposons que  $K$  ne soit pas connexe : soient  $A$  et  $B$  deux fermés disjoints non vides tels que  $K = A \cup B$ . Soit  $\varepsilon = \inf\{\|x - y\| : (x, y) \in A \times B\} > 0$ , et  $n \geq 0$  tel que  $d_H(K_n, K) \leq \varepsilon/3$ . Alors,  $K_n = (\mathcal{V}_{\varepsilon/3}(A) \cap K_n) \cup (\mathcal{V}_{\varepsilon/3}(B) \cap K_n)$  donc  $K_n$  n'est pas connexe car c'est l'union de deux fermés non vides disjoints.  $\square$

Remarquons que la connexité du fractal n'implique pas nécessairement la connexité des approximations. Par exemple, le fractal associé à la substitution  $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 12$  (figure 11) est connexe, mais ses approximations ne sont pas connexes.

**Connexité des fractals d’Arnoux-Rauzy et Jacobi-Perron.** En combinant les théorèmes 3.8 et 3.9 à la proposition 4.6, on peut déduire la connexité de tout fractal associé à une substitution Pisot irréductible qui est un produit fini de substitutions de Jacobi-Perron ou d’Arnoux-Rauzy. Arnoux et Ito ont montré que tout produit fini d’Arnoux-Rauzy dans lequel chacune apparaît au moins une fois est Pisot irréductible [AI01].

**Théorème 4.7.** *Le fractal de Rauzy associé à un produit Pisot irréductible de substitutions d’Arnoux-Rauzy est connexe.*



FIGURE 12 – À gauche, le fractal associé à la substitution de Tribonacci, qui est un produit de substitution d’Arnoux-Rauzy. À droite, le fractal non connexe associé au produit  $\varepsilon_{1,2}\varepsilon_{3,1}\varepsilon_{2,3}\varepsilon_{1,3}$ .

**Simple connexité.** Il n’est malheureusement pas possible de conclure directement la simple connexité d’un fractal de Rauzy à partir de la simple connexité de ses approximations, car contrairement à la connexité, la simple connexité ne passe pas à la limite de Hausdorff. Il serait très intéressant de trouver des critères combinatoires sur les motifs qui soient facilement vérifiables, qui impliquent la simple connexité, et qui passent à la limite de Hausdorff.

## Conclusion

Dans ce rapport, nous avons étudié les propriétés topologiques associées à plusieurs stratégies d’engendrement de plans discrets par l’itération de substitutions généralisées. Nous retiendrons que les motifs engendrés par l’algorithme de Jacobi-Perron et les substitutions d’Arnoux-Rauzy se « comportent bien » (sont simplement connexes), alors que les motifs engendrés par les substitutions élémentaires et par itération d’une substitution Pisot irréductible peuvent donner des motifs non connexes et non simplement connexes.

**Perspectives de travail.** Une première perspective de travail est l’élaboration d’arguments combinatoires similaires à ceux utilisés dans la section 3 afin de prouver la connexité des motifs pour d’autres familles d’algorithmes (par exemple l’algorithme de Brun), et pour obtenir de nouvelles propriétés topologiques des approximations et des fractals de Rauzy (par exemple la simple connexité des fractals associés aux substitutions d’Arnoux-Rauzy).

Un autre problème très intéressant est l’étude des questions de décidabilité sous-jacentes à l’engendrement de plan discret, en considérant par exemple les problèmes de décision suivants : étant donnée une substitution  $\sigma$ , les motifs  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{U})^n$  sont-ils connexes ? Simplement connexes ? Le point  $(0, 0, 0)$  se trouve-t-il sur une face du bord ? Le même genre de problèmes de décisions se posent pour les fractals, et on déjà été abordés : des conditions nécessaires et algorithmiquement vérifiables ont été données pour certaines propriétés, dont la connexité des fractals de Rauzy [ST].

## Références

- [ABFJ07] Pierre Arnoux, Valérie Berthé, Thomas Fernique, and Damien Jamet, *Functional stepped surfaces, flips, and generalized substitutions*, Theoret. Comput. Sci. **380** (2007), no. 3, 251–265.
- [ABI02] Pierre Arnoux, Valérie Berthé, and Shunji Ito, *Discrete planes,  $\mathbb{Z}^2$ -actions, Jacobi-Perron algorithm and substitutions*, Ann. Inst. Fourier **52** (2002), no. 2, 305–349.
- [ABS04] Pierre Arnoux, Valérie Berthé, and Anne Siegel, *Two-dimensional iterated morphisms and discrete planes*, Theoret. Comput. Sci. **319** (2004), no. 1-3, 145–176.
- [AI01] Pierre Arnoux and Shunji Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **8** (2001), no. 2, 181–207.
- [AR91] Pierre Arnoux and Gérard Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité  $2n + 1$* , Bull. Soc. Math. France **119** (1991), no. 2, 199–215.
- [Bar93] Michael F. Barnsley, *Fractals everywhere*, second ed., Academic Press, 1993.
- [BEIR07] Valérie Berthé, Hiromi Ei, Shunji Ito, and Hui Rao, *On substitution invariant Sturmian words : an application of Rauzy fractals*, Theor. Inform. Appl. **41** (2007), no. 3, 329–349.
- [BJS] Valérie Berthé, Timo Jolivet, and Anne Siegel, *Connectedness of Rauzy fractals associated with Arnoux-Rauzy substitutions*, en préparation.
- [BLPP] Valérie Berthé, Annie Lacasse, Geneviève Paquin, and Xavier Provençal, *A study of Jacobi-Perron boundary words for the generation of discrete planes*, en préparation.
- [BR10] Valérie Berthé and Michel Rigo, *Combinatorics, automata and number theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 135, Cambridge University Press, 2010.
- [Bre81] Arne J. Brentjes, *Multidimensional continued fraction algorithms*, Mathematical Centre Tracts, vol. 145, Mathematisch Centrum, 1981.
- [Bru58] Viggo Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres*, Treizième congrès des mathématiciens scandinaves, tenu à Helsinki 18-23 août 1957, Mercators Tryckeri, Helsinki, 1958, pp. 45–64.
- [Can03] Vincent Canterini, *Connectedness of geometric representation of substitutions of Pisot type*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **10** (2003), no. 1, 77–89.
- [CFM08] Julien Cassaigne, Sébastien Ferenczi, and Ali Messaoudi, *Weak mixing and eigenvalues for Arnoux-Rauzy sequences*, Ann. Inst. Fourier **58** (2008), no. 6, 1983–2005.
- [CFZ00] Julien Cassaigne, Sébastien Ferenczi, and Luca Q. Zamboni, *Imbalances in Arnoux-Rauzy sequences*, Ann. Inst. Fourier **50** (2000), no. 4, 1265–1276.
- [CS01] Vincent Canterini and Anne Siegel, *Geometric representation of substitutions of Pisot type*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 12, 5121–5144.
- [Fal03] Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, second ed., John Wiley & Sons, 2003, Mathematical foundations and applications.
- [Fer06] Thomas Fernique, *Multidimensional Sturmian sequences and generalized substitutions*, Internat. J. Found. Comput. Sci. **17** (2006), no. 3, 575–599.
- [Fer07a] \_\_\_\_\_, *Local rule substitutions and stepped surfaces*, Theoret. Comput. Sci. **380** (2007), no. 3, 317–329.
- [Fer07b] \_\_\_\_\_, *Pavages, Fractions Continues et Géométrie discrète*, thèse de doctorat, Université Montpellier II, 2007.
- [Fer08] \_\_\_\_\_, *Generation and recognition of digital planes using multi-dimensional continued fractions*, Discrete geometry for computer imagery, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 4992, Springer, 2008, pp. 33–44.
- [Fog02] N. Pytheas Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794, Springer-Verlag, 2002.
- [GJ09] Amy Glen and Jacques Justin, *Episturmian words : a survey*, Theor. Inform. Appl. **43** (2009), no. 3, 403–442.
- [GS87] Branko Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, W. H. Freeman and Company, 1987.

- [IK91] Shunji Ito and Minako Kimura, *On Rauzy fractal*, Japan J. Indust. Appl. Math. **8** (1991), no. 3, 461–486.
- [IO93] Shunji Ito and Makoto Ohtsuki, *Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms*, Tokyo J. Math. **16** (1993), no. 2, 441–472.
- [IO94] ———, *Parallelogram tilings and Jacobi-Perron algorithm*, Tokyo J. Math. **17** (1994), no. 1, 33–58.
- [Jac68] C. G. J. Jacobi, *Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird*, J. Reine Angew. Math. (1868), 29–64.
- [Lot02] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 90, Cambridge University Press, 2002.
- [Moo00] Robert V. Moody, *Model sets : a survey*, From Quasicrystals to More Complex Systems, Springer Verlag, 2000, F. Axel, F. Dénoyer, and J.-P. Gazeau, Centre de physique Les Houches.
- [Rau82] Gérard Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), no. 2, 147–178.
- [Rev] Jean-Pierre Reveillès, *Géométrie discrète, calculs en nombres entiers et algorithmes*, thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.
- [SAI01] Yuki Sano, Pierre Arnoux, and Shunji Ito, *Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps*, J. Anal. Math. **83** (2001), 183–206.
- [Sch00] Fritz Schweiger, *Multidimensional continued fractions*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 2000.
- [ST] Anne Siegel and Jörg Thuswaldner, *Topological properties of Rauzy fractal*, Mém. Soc. Math. Fr., à paraître.