$\vartheta(\mathfrak{g})$ *induzierte Darstellung von* $\mathfrak{g}_1$. *Unter diesen Bedingungen enthält* $\vartheta_1(\mathfrak{g}_1)$ *die Hauptdarstellung genau einmal dann und nur dann wenn*

$$f_{\mathfrak{g}_1}^{(P)}(x) = \bar{f}_{\mathfrak{g}}(x) \neq 0$$

für alle P aus $\mathfrak{g}$. (Hier ist $f_{\mathfrak{g}_1}^{(P)}(x)$ durch (7) gegeben.)

Zum Schluss sei bemerkt, dass man die obige Fragestellung auch für allgemeine Substitutionsgruppen in fast derselben Weise behandeln kann.

CHALMERS TECHNISCHE HOCHSCHULE, SCHWEDEN

XIII CONGR. MATH. SCAND. (1957)

ALGORITHMES EUCLIDIENS POUR TROIS ET QUATRE NOMBRES

VIGGO BRUN

On trouve dans les éléments d'Euclide [1] le théorème suivant:

»Etant données deux grandeurs inégales, et la plus petite étant retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, ces deux grandeurs seront incommensurables.»

L'algorithme d'Euclide n'est pas seulement utilisable pour l'étude de l'irrationalité mais peut aussi servir à trouver des fractions approximatives d'un nombre irrationel, bien qu' Euclide ne s'occupe pas de ceci. Néanmoins il semble probable que ceci était déjà fait par les grecs, par exemple par Archimède en calculant $\sqrt{3}$ par les fractions approximatives bien connues.

On remarque qu' Euclide se sert seulement de la soustraction et non pas de la division. Aujourd'hui on donne l'algorithme d'Euclide sous forme d'un algorithme de division. Ceci est d'ailleurs très naturel quant on veut utiliser l'algorithme d'Euclide pour un développement en fraction continue. Mais quand il s'agit de généraliser l'algorithme d'Euclide c'est bien important si l'on se sert de la soustraction ou bien de la division. Il me semble que ceci constitue la raison pour quoi la généralisation des fractions continues par Jacobi [2] n'est pas d'une grande valeur. Il se base comme on sait sur la division.

Dans la généralisation que j'ai donné en 1918 et 1919 [3] je me suis basé sur la soustraction. Aussi Poincaré [4] a fait cela — déjà en 1884 — en généralisant les fractions continues mais son algorithme a quelques défectivités comme j'ai essayé d'indiquer auparavant.

Comme Poincaré je me suis servi d'une interprétation géométrique dans l'espace à trois dimensions pour étendre l'algorithme d'Euclide à un ensemble de trois nombres. Ici je ne vais pas m'appuyer sur cette considération géométrique bien que celle-ci puisse servir de motivation pour la généralisation en question.

Dans les travaux intéressants de Nils Pipping [5] et Leo Törnqvist [6] on peut aussi trouver un développement qui ne fait pas intervenir des considérations géométriques. Dans les travaux fondamentaux de Minkowski, fondés sur des études géométriques on ne trouve aucun algorithme simple.

Je vais commencer en donnant l'algorithme d'Euclide pour deux nombres sous une forme qui se prète bien à la généralisation en question, sans vouloir prétendre qu'elle donne un avantage essentiel dans ce cas simple.

Après cela je vais traiter mon algorithme dans le cas de trois nombres, sans supposer connus mes travaux antérieurs. Je vais d'abord traiter les questions de convergence et ensuite les questions concernant l'indépendance linéaire entre les nombres donnés.

Enfin je traiterai l'algorithme dans le cas de quatre nombres. On remarque ici une différence essentielle entre les cas de deux et trois nombres d'un coté et le cas de quatre nombres de l'autre: Dans le dernier cas l'indépendance linéaire n'est plus valable sans exception bien qu'il soit certainement verifié dans des cas étendus.

Nous n'allons pas ici étudier de plus près ces cas exceptionels même pas en ce qui concerne la question de convergence. Enfin nous donnons quelques exemples importants pour lesquels l'indépendance linéaire n'est pas satisfait.

1. L'algorithme d'Euclide pour deux nombres.

Soient a et b deux nombres positifs tels que $a > b$. Nous en formons deux autres nombres à savoir $a - b$ et b. Il existe ici deux possibilités suivant que $a - b \geq b$ ou $a - b < b$. Je désigne ces deux possibilités par α et β. En traitant le couple ainsi obtenu de la même manière nous obtenons de nouveau une lettre, soit α soit β. Le couple donné a, b determine donc une suite de signes constituée par les deux lettres α et β. Le couple $\sqrt{2}$, 1 donne ainsi une suite périodique:

$$\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\ldots$$

Dans ce cas l'algorithme est le suivant en utilisant seulement trois décimaux:

	X	Y
$a = 1{,}414$	1	0
$b = 1{,}000$	0	1
$a - b = 0{,}414$	1	0
$b = 1{,}000$	1	1
β		
$a_1 = 1{,}000$	1	1
$b_1 = 0{,}414$	1	0
$a_1 - b_1 = 0{,}586$	1	1
$b_1 = 0{,}414$	2	1
α		
$a_2 = 0{,}586$	1	1
$b_2 = 0{,}414$	2	1
$a_2 - b_2 = 0{,}172$	1	1
$b_2 = 0{,}414$	3	2
β		
$a_3 = 0{,}414$	3	2
$b_3 = 0{,}172$	1	1
$a_3 - b_3 = 0{,}242$	3	2
$b_3 = 0{,}172$	4	3
α		
$a_4 = 0{,}242$	3	2
$b_4 = 0{,}172$	4	3
$a_4 - b_4 = 0{,}070$	3	2
$b_4 = 0{,}172$	7	5

Les nombres X et Y (les »coordonnées») donnent ici des fractions approximatives X/Y à $\sqrt{2}$. Le schéma de l'algorithme est le suivant

a	X'	Y'
b	X''	Y''
$a - b$	X'	Y'
b	$X' + X''$	$Y' + Y''$
a_1	X_1'	Y_1'
b_1	X_2'	Y_2'

On voit que a est remplacé par $a - b$ alors que b n'est pas changé. De même X'' et Y'' sont remplacés par $X' + X''$ et $Y' + Y''$ alors que X' et Y' sont conservés. Après ceci on a noté une des deux lettres α et β et on a arrangé les lignes de telle façon que $a_1 > b_1$. Dans le cas α ceci ne signifie qu'une répétition des deux lignes. Dans le cas β on change l'ordre des deux lignes. On note que les »fractions intercalées» que l'on introduit dans la théorie des fractions continues sont immédiatement représentées ici. Les résultats qu'on peut obtenir par ce procédé sont bien connus dans la théorie des fractions continues. Je me borne à constater que deux nombres a et b qui donnent une suite de lettres où β est repété une infinité de fois ont les propriétés suivantes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n'}{Y_n'} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{X_n''}{Y_n''} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b} \text{ est un nombre irrationel.}$$

2. Algorithme euclidien pour trois nombres.

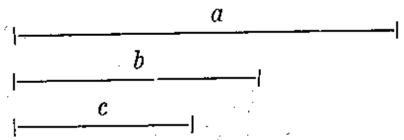
Commençons par constater qu'une généralisation de l'algorithme d'Euclide est désirable. Barbour [7] a posé le problème suivant dans la théorie de la musique: Déterminer trois nombres naturels X, Y, Z, tels que la relation approximative

$$\frac{\log 2}{X} \approx \frac{\log 3/2}{Y} \approx \frac{\log 5/4}{Z}$$

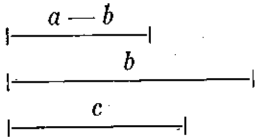
soit satisfaite. Barbour a essayé de résoudre ce problème par la méthode de Jacobi, mais il a été obligé de la modifier à deux reprises. Dans [9] j'ai essayé de montrer que mon algorithme est préférable.

Une des raisons pour l'introduction de mon algorithme est qu'il permet d'englober le cas de deux nombres comme cas particulier en mettant un des trois nombres égal à zéro.

Soient a, b, c trois nombres tels que $a > b > c$. Je dis qu'un tel triple est ordonné.



On forme maintenant le triple $a - b$, b, c:



Pour ce triple il existe trois possibilités:

$$a - b \geq b$$
$$b > a - b \geq c$$
$$c > a - b\,.$$

Je désigne ces trois possibilités par α, β et γ, respectivement.

Si en particulier $c = 0$ la possibilité γ ne peut pas se presenter. L'algorithme prend alors la forme d'un algorithme d'Euclide pour deux nombres. Nous nous bornerons dans la suite à étudier des algorithmes contenants γ une infinité de fois. Dans ce cas on n'aura jamais $a_n = b_n$ dans le n-ième triple ordonné, puisque dans le cas contraire on aura $c_{n+1} = 0$, et alors l'algorithme continu comme l'algorithme d'Euclide ordinaire. Il faut aussi exclure le cas $b_n = c_n$ parceque le triple a_n, b_n, c_n après les r premières lettres α (où $r = 0$ n'est pas exclu) sera transformé en $a_n - (r+1)b_n$, b_n, c_n avec $a_n - (r+1)b_n < b_n = c_n$ et le triple obtenu sera alors c_n, c_n, $a_n - rb_n$, mais ce triple ne peut pas donner plus qu'un γ.

Quand il s'agit des grandeurs X, Y, Z qui doivent donner des nombres entiers approximativement proportionaux aux nombres a, b, c j'ai choisi le procédé suivant:

On remplace le triple ordonné

$$\begin{array}{c|ccc} a & X' & Y' & Z' \\ b & X'' & Y'' & Z'' \\ c & X''' & Y''' & Z''' \end{array}$$

par le triple

$$\begin{array}{c|ccc} a-b & X' & Y' & Z' \\ b & X'+X'' & Y'+Y'' & Z'+Z'' \\ c & X''' & Y''' & Z''' \end{array}$$

qui ensuite sera transformé en un triple ordonné en permutant les lignes.

Pour $c = 0$ l'algorithme se développe comme un algorithme d'Euclide pour deux nombres.

En étudiant l'algorithme pour trois nombres il sera désirable de noter les nombres

$$\xi = aY - bX = aX\left(\frac{Y}{X} - \frac{b}{a}\right) \text{ et}$$
$$\eta = aZ - cX = aX\left(\frac{Z}{X} - \frac{c}{a}\right).$$

Je me borne à noter les nombres ξ. (Les mêmes réflexions vont aussi bien pour η.) Je note aussi la valeur

$$\omega = \text{Max}\,(|\xi'|,\ |\xi''|,\ |\xi'''|)$$

pour chaque triple.

Soient par exemple donnés les trois nombres $a = \log 2 = 0{,}301\ldots$ $b = \log 3/2 = 0{,}176\ldots$ $c = \log 5/4 = 0{,}097\ldots$ En nous bornant à trois décimaux l'algorithme sera donné par le tableau suivant

	X	Y	Z	ξ	ω
0,301	1	0	0	—0,176	
0,176	0	1	0	0,301	0,301
0,097	0	0	1	0,000	
0,125	1	0	0	—0,176	0,176
0,176	1	1	0	0,125	
0,097	0	0	1	0,000	
β					
0,176	1	1	0	0,125	
0,125	1	0	0	—0,176	0,176
0,097	0	0	1	0,000	
0,051	1	1	0	0,125	0,125
0,125	2	1	0	—0,051	
0,097	0	0	1	0,000	
γ					

0,125	2	1	0	—0,051	
0,097	0	0	1	0,000	
0,051	1	1	0	0,125	0,125
0,028	2	1	0	—0,051	
0,097	2	1	1	—0,051	
0,051	1	1	0	0,125	0,125
γ					
0,097	2	1	1	—0,051	
0,051	1	1	0	0,125	0,125
0,028	2	1	0	—0,051	
0,046	2	1	1	—0,051	
0,051	3	2	1	0,074	0,074
0,028	2	1	0	—0,051	
β					

Ici ω est noté dans sa ligne »naturelle«. Etudions la variation de ω généralement. Soit

$$\begin{array}{c|l} a & \xi' \\ b & \xi'' \\ c & \xi''' \\ \hline a-b & \xi' \\ b & \xi' + \xi'' \\ c & \xi''' \\ \hline \alpha,\ \beta \text{ ou } \gamma & \\ \hline a_1 & \xi_1{}' \\ b_1 & \xi_1{}'' \\ c_1 & \xi_1{}''' \end{array}$$

une partie quelconque de l'algorithme allant d'un triple au suivant.

Nous avons

$$a\xi' + b\xi'' + c\xi''' = (a-b)\xi' + b(\xi' + \xi'') + c\xi''' = a_1\xi_1' + b_1\xi_1'' + c_1\xi_1'''.$$

Supposons que l'algorithme commence comme suit

	X	Y	Z	ξ	ω
a	1	0	0	$-b$	
b	0	1	0	a	a
c	0	0	1	0	

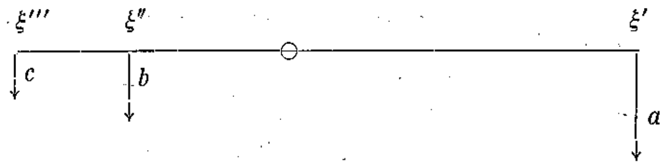
où

$$a\xi' + b\xi'' + c\xi''' = -ab + ba + c.0 = 0.$$

Nous obtenons donc l'équation d'invariance

$$a_r.\xi_r' + b_r.\xi_r'' + c_r.\xi_r''' = 0.$$

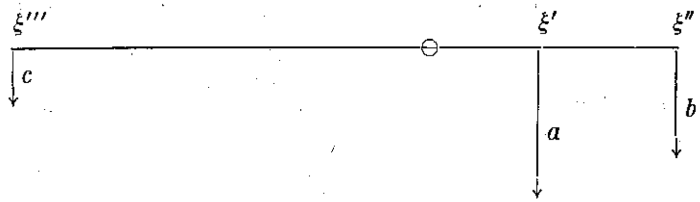
Pour plus de clarté j'interprète cette équation comme une équation d'équilibre:



Les nombres a, b, c sont positifs mais les nombres ξ d'un triple ne peuvent pas avoir le même signe.

Je dis qu'en allant d'un triple au suivant ω ne peut pas croître.

Cela est évident quand ξ' et ξ'' n'ont pas le même signe. Mais nous pouvons aussi le montrer si ξ' et ξ'' ont le même signe par exemple si tous les deux sont positifs.



Comme ξ'' sera ici a substituer par $\xi' + \xi''$ un des trois grandeurs ξ peut croître mais au moyen de la condition d'équilibre on déduit que le bras ξ''' est plus grand que la somme des deux bras ξ' et ξ'' et ceci en vertu de

$$c\,\xi''' = a\xi' + b\xi'' \geq b(\xi' + \xi'')$$

donc

$$\xi''' \geq \frac{b}{c}(\xi' + \xi'') > \xi' + \xi''.$$

Dans ce cas ω ne change pas en passant au triple suivant.

La suite des nombres ω est donc non = croîssante:

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq \ldots.$$

Comme la première valeur de ω est égale à a on a toujours $\omega \leq a$. On en déduit

$$\left|\frac{Y_n}{X_n} - \frac{b}{a}\right| = \frac{|\xi_n|}{aX_n} < \frac{1}{X_n}.$$

Ici X_n et Y_n est une abréviation pour X_n', X_n'', X_n''' et Y_n', Y_n'', Y_n'''. Il faut supposer que $X_n > 0$ ce qui va arriver pour un certain n quand la suite des lettres contient une infinité de γ. A partir d'un tel n, X_n va croître. *On en déduit la convergence d'un algorithme avec une infinité de γ:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{X_n} = \frac{b}{a}.$$

De même on aura

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{X_n} = \frac{c}{a}.$$

Cherchons maintenant s'il existe toujours une infinité de signes > dans la suite

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq \ldots$$

en supposant que la suite des lettres appartenantes aux nombres donnés (a, b, c) contient une infinité de γ.

Comme il est possible que la grandeur ω qui doit être noté à droite de chaque triple peut se presenter une, deux ou trois fois nous démontrons d'abord la proposition suivante:

Le nombre des lettres ω qui sont noté à droite d'un triple ne peut pas croître en passant d'un triple au triple suivant.

Nous pouvons écarter le cas $\xi' = 0$ puisque ω ne change pas dans ce cas. Supposons $\xi' > 0$. La condition pour une croîssance du nombre des nombres ω est

$$|\xi''| < \omega$$

et au même temps $|\xi' + \xi''| = \omega$.

Ici ξ'' ne peut pas être negatif. Il faut donc supposer $\xi'' \geq 0$ mais ceci entraine à cause de l'équilibre que $\xi' + \xi'' < |\xi'''| \leq \omega$.

On traite le cas $\xi' < 0$ de la même manière. Nous démontrons alors que le nombre des valeurs ω appartenantes à un triple tôt ou tard décroîtra en passant d'un triple au suivant jusqu'à ce qui'il ne restera qu'une seule.

Etudions en particulier un ξ auquel corréspond la valeur ω. Supposons $\xi > 0$. Tôt ou tard il prendra la deuxième place dans le triple quand la suite des lettres contient une infinité de γ. Etudions un tel triple ordonné

$$\begin{array}{c|l} \xi' & \\ \xi'' & \omega \\ \xi''' & \end{array} \quad \text{et le suivant} \quad \begin{array}{l} \xi' \\ \xi' + \xi'' \\ \xi'''. \end{array}$$

Comme nous avons déjà montré

$$|\xi' + \xi''| \leq \omega$$

il s'ensuit que

$$|\xi' + \xi''| < \omega$$

sauf dans le cas $\xi' = 0$. Mais un triple ordonné de la forme

$$\begin{array}{c|l} 0 & \\ \xi'' & \omega \\ \xi''' & \end{array}$$

est impossible comme on voit en regardant la condition d'équilibre. Le cas $\xi'' < 0$ se traite de la même manière.

Quand il restera seulement un ω et quand il a obtenu la deuxième place il diminuera à cause de la même raison.

Nous avons donc démontré qu'il existe une infinité de signes $>$ dans la suite

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq \ldots$$

pourvu que la suite des lettres corréspondante contienne une infinité de γ.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant: *Si trois nombres positifs a, b et c donnent une suite de lettres avec une infinité de γ, il est impossible de trouver trois nombres entiers P, Q, R tels que*

$$Pa + Qb + Rc = 0 \text{ (sauf pour } P = Q = R = 0).$$

Supposons cette relation vérifiée. Alors nous pouvons écrire l'algorithme

$$\begin{array}{r|l} a & P \\ b & Q \\ c & R \\ \hline a - b & P \\ b & P + Q \\ c & R \end{array}$$

où les nombres P, Q, R sont traités comme les nombres ξ. La condition d'équilibre serait alors rempli. En introduisant

$$\omega = \mathrm{Max}(|P|, |Q|, |R|)$$

on obtiendrait une suite

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq \ldots$$

avec une infinité des signes $>$. Puisque les nombres ω sont des nombres entiers positifs ceci donne la contradiction cherchée.

Donnons deux exemples.

Exemple 1. J'ai récemment [8] démontré que le triple

$$a = e^{\frac{3}{2}} + 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = e^{\frac{3}{2}} - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c = e^{\frac{3}{2}} - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} - \quad 3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donne la suite

$$\gamma\alpha\gamma\alpha\alpha\alpha\gamma\alpha\alpha\alpha\alpha\gamma\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\gamma \ldots\ldots$$

Le nombre des lettres α entre deux γ sont 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12 ... c'est-à-dire tous nombres sauf 2, 5, 8, 11, ... $(3r - 1)$, ...

Nous en déduissons qu'il est impossible de trouver trois nombres entiers non-nuls tels que

$$Pa + Qb + Rc = 0.$$

Exemple 2. En calculant la suite des lettres pour le triple $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{2}$, 1 on trouve

$$\gamma \quad \gamma\alpha\alpha\gamma\beta\alpha\alpha\beta\gamma\alpha\alpha\gamma\beta\gamma\gamma\gamma\gamma\beta \quad \gamma\alpha\alpha\gamma\beta\alpha\alpha\beta\gamma\alpha\alpha\gamma\beta\gamma\gamma\gamma\gamma\beta \ldots$$

qui a l'aire périodique. En effet on peut vérifier qu'il en est ainsi. Commençons l'algorithme par

$$\begin{array}{l} a = \sqrt[3]{4} = 1{,}58740105199 \\ b = \sqrt[3]{2} = 1{,}25992104990 \\ c = 1 \quad = 1{,}00000000000 \\ \hline \quad \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \\ \qquad \sqrt[3]{2} \\ \qquad\ 1 \\ \hline \qquad\ \gamma \\ \hline a_1 = \sqrt[3]{2} \\ b_1 = 1 \\ c_1 = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}. \end{array}$$

Si l'on continue les calculs jusqu'au bout de la première période on obtient

$$\begin{aligned} a_{19} &= 14a_1 - 16b_1 - 5c_1 \\ b_{19} &= -13a_1 + 19b_1 - 8c_1 \\ c_{19} &= -11a_1 + 6b_1 + 24c_1 \end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{14a_1 - 16b_1 - 5c_1}{a_1} = \frac{-13a_1 + 19b_1 - 8c_1}{b_1} = \frac{-11a_1 + 6b_1 + 24c_1}{c_1}$$

et l'algorithme continue donc périodiquement.

Parce qu'on a une infinité des γ il sera impossible de trouver trois entiers non-nuls P, Q, R tels que

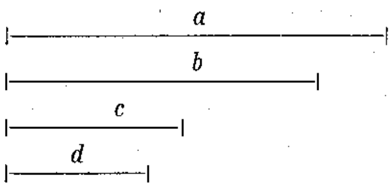
$$P\sqrt[3]{4} + Q\sqrt[3]{2} + R = 0.$$

On voit que cette méthode donne des fractions approximatives pour $\sqrt[3]{2}$. Au lieu de chercher à trouver une régularité dans la fraction continue pour $\sqrt[3]{2}$ nous avons trouvé une régularité dans l'algorithme pour trois nombres en ajoutant le nombre $\sqrt[3]{4}$. En nous servant d'une expréssion de la chimie nous pouvons dire que nous avons ajouté le nombre $\sqrt[3]{4}$ comme un »catalyseur» pour obtenir des renseignements concernant le nombre $\sqrt[3]{2}$.

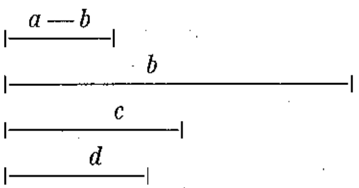
3. Algorithme euclidien pour quatre nombres.

Soient a, b, c, d quatre nombres positifs tels que

$$a > b > c > d.$$



On en forme un autre quadruple $a - b$, b, c, d



Il existe quatre possibilités que l'on peut désigner par α, β, γ et δ:

$a - b \geq b$	donne	α
$b > a - b \geq c$	»	β
$c > a - b \geq d$	»	γ
$d > a - b$	»	δ.

Nous étudions seulement des algorithmes où il-y-a une infinité de δ. Dans ce cas on ne peut pas avoir $a_n = b_n$, le quadruple ordonné suivant étant alors a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, 0. Mais $b_n = c_n$ est aussi impossible puisque on aurait alors un quadruple suivant: a_r, b_r, c_r, d_r où $b_r = a_r$, c'est-à-dire du même type comme auparavant. La possibilité $c_n = d_n$ ne peut pas avoir lieu non plus. Dans ce cas l'algorithme va conduire à un quadruple appartenant au deuxième type mentionné.

Etudions les »coordonnées» X, Y, Z, U et les grandeurs $\xi = aY - bX$, $\eta = aZ - cX$, $\zeta = aU - dX$ suivant les mêmes règles comme dans le cas précédent. L'algorithme commence alors par

	X	Y	Z	U	ξ	η	ζ
a	1	0	0	0	$-b$	$-c$	$-d$
b	0	1	0	0	a	0	0
c	0	0	1	0	0	a	0
d	0	0	0	1	0	0	a
$a - b$	1	0	0	0	$-b$	$-c$	$-d$
b	1	1	0	0	$a - b$	$-c$	$-d$
c	0	0	1	0	0	a	0
d	0	0	0	1	0	0	a

Nous nous bornons à étudier comment varient les grandeurs ξ. Les mêmes raisonnements sont valables pour η et ζ. Nous introduisons ici aussi les grandeurs

$$\omega = \mathrm{Max}(|\xi'|, |\xi''|, |\xi'''|, |\xi''''|).$$

L'algorithme se réduit donc au calcul suivant

a_r	ξ_r'
b_r	ξ_r''
c_r	ξ_r'''
d_r	ξ_r''''
$a_r - b_r$	ξ_r'
b_r	$\xi_r' + \xi_r''$
c_r	ξ_r'''
d_r	ξ_r''''
α, β, γ ou δ	
a_{r+1}	ξ_{r+1}'
b_{r+1}	ξ_{r+1}''
c_{r+1}	ξ_{r+1}'''
d_{r+1}	ξ_{r+1}''''

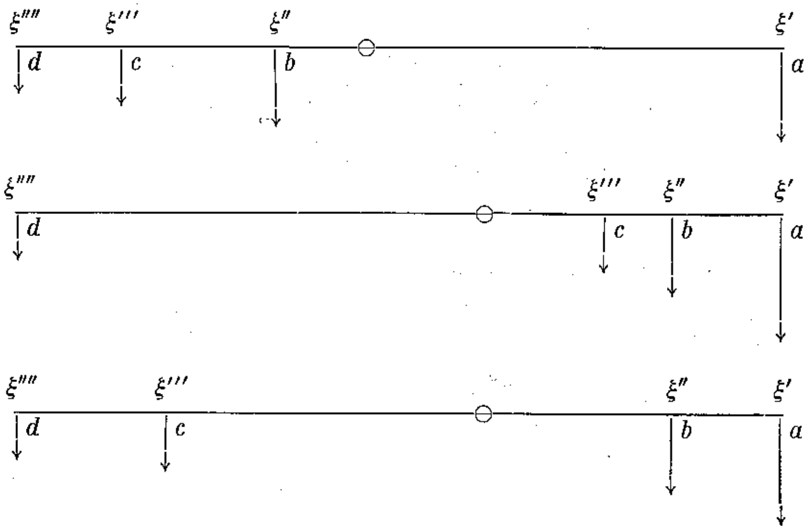
On obtient ici aussi l'équation d'invariance

$$a_r \xi_r' + b_r \xi_r'' + c_r \xi_r''' + d_r \xi_r'''' = 0,$$

ou plus brièvement

$$a\xi' + b\xi'' + c\xi''' + d\xi'''' = 0.$$

Nous interprétons cette équation comme une équation d'équilibre. Nous supposons $\xi' \geq 0$. L'étude du cas $\xi' \leq 0$ se fait de la même manière. Il faut distinguer trois cas différents. Etudions les trois leviers correspondants:



Dans le premier cas on a $\xi'' \leq 0$. Alors ω ne peut pas croître en passant d'un quadruple au suivant. Dans le deuxième cas on a $\xi'' \geq 0$ tandis que ξ''' et ξ'''' ont des signes opposés. Un de ces quantités (ici ξ'''') ont alors la valeur ω et $\xi' + \xi''$ ne peut pas surpasser cette valeur. Dans le troisième cas on a aussi $\xi'' \geq 0$ mais avec $\xi''' \leq 0$ et $\xi'''' \leq 0$.

Ici il existe deux possibilités:

1. ω ne croît pas.
2. ω croît (ou reste inaltéré).

Le dernier cas arrive si

$$\xi' + \xi'' \geq |\xi'''| \quad \text{et} \quad |\xi' + \xi''| \geq |\xi''''|.$$

J'appelle ce cas le cas critique. Pour tous les cas non-critiques on a

$$a = \omega_0 \geq \omega_1 \geq \omega_2 \geq \ldots.$$

Dans tous les quatres lignes d'un quadruple on a alors

$$|aY_r - bX_r| = |\xi_r| \leq \omega_r \leq a$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{Y_r}{X_r} - \frac{b}{a}\right| \leq \frac{1}{X_r}.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{X_n} = \frac{b}{a}$$

et de même que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{X_n} = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{X_n} = \frac{d}{a}.$$

Notre algorithme aboutit donc à une limite pourvue qu'il n'y ait pas des cas critiques pour les grandeurs ξ, η et ζ.

Nous démontrons le théorème suivant:

S'il existe un cas critique parmi les ξ d'un quadruple il faut que la suite des lettres contienne au moins un des trois groupes $\gamma\delta$, $\delta\gamma$ et $\delta\delta$.

Supposons que le quadruple

$$\begin{array}{c|c} a & \xi' \\ b & \xi'' \\ c & \xi''' \\ d & \xi'''' \end{array}$$

soit critique ainsi que

$$\xi' \geq 0, \;\; \xi'' \geq 0, \;\; \xi''' \leq 0, \;\; \xi'''' \leq 0 \;\text{ et}$$
$$\xi' + \xi'' \geq |\xi'''|$$
$$\xi' + \xi'' \geq |\xi''''|.$$

Si l'algorithme commence par une certaine suite de nombres α et β les conditions pour un cas critique subsiste toujours. Nous pouvons alors écarter cette possibilité en nous bornant à étudier les deux cas où le quadruple ci-dessus est suivi d'un γ ou d'un δ. Etudions le premier cas.

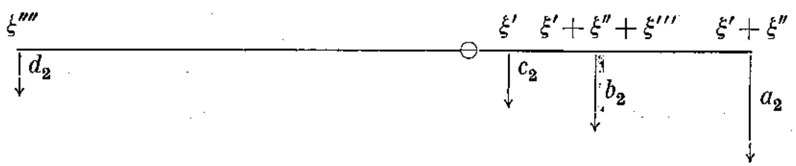
L'algorithme sera alors comme suit:

a	ξ'
b	ξ''
c	ξ'''
d	ξ''''
$a-b$	ξ'
b	$\xi'+\xi''$
c	ξ'''
d	ξ''''
γ	
a_1	$\xi'+\xi''$
b_1	ξ'''
c_1	ξ'
d_1	ξ''''
a_1-b_1	$\xi'+\xi''$
b_1	$\xi'+\xi''+\xi'''$
c_1	ξ'
d_1	ξ''''

	α	β	γ	δ
a_2	$\xi'+\xi''$	$\xi'+\xi''+\xi'''$	$\xi'+\xi''+\xi'''$	$\xi'+\xi''+\xi'''$
b_2	$\xi'+\xi''+\xi'''$	$\xi'+\xi''$	ξ'	ξ'
c_2	ξ'	ξ'	$\xi'+\xi''$	ξ''''
d_2	ξ''''	ξ''''	ξ''''	$\xi'+\xi''$

Nous démontrons que les trois possibilités α, β et γ sont à exclure. Il n'y a que le cas δ qui peut se présenter.

Etudions le cas α et dessinons le levier correspondant:



En regardant les conditions mentionnées on voit que

$$\xi'+\xi''+\xi'''\geq 0 \quad \text{et} \quad \xi'\geq 0 \quad \text{et} \quad \xi'+\xi''>0.$$

On a ici

$$d_2|\xi''''| = c_2\xi' + b_2(\xi'+\xi''+\xi''') + a_2(\xi'+\xi'') > d_2(3\xi'+2\xi''+\xi''')$$

C'est-à-dire

$$3\xi'+2\xi''+\xi'''+\xi''''<0$$

mais ceci est en contradiction avec les conditions

$$\xi'+\xi''\geq|\xi'''|$$

et

$$\xi'+\xi''\geq|\xi''''|$$

C'est-à-dire

$$2\xi'+2\xi''+\xi'''+\xi''''\geq 0.$$

On peut également montrer que les cas β et γ aboutissent à des contradictions semblables.

En traitant les cas $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ et $\delta\delta$ de la même manière on trouve que les deux cas $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ aboutissent à des contradictions.

Nous avons supposé que ξ' et ξ'' sont non-negatifs. La démonstration est tout-à-fait analogue pour ξ' et ξ'' non-positifs.

Nous obtenons donc le théorème suivant: Un quadruple a, b, c, d qui donne une suite de lettres avec une infinité de δ sans contenir les groupes $\gamma\delta$, $\delta\gamma$ ou $\delta\delta$ donne lieu à une suite de la forme

$$\omega_1\geq\omega_2\geq\omega_3\geq\ldots.$$

Dans ce cas et *dans les cas où les groupes $\gamma\delta$, $\delta\gamma$ et $\delta\delta$ ne sont pas répétés une infinité de fois on peut donc être assuré de la convergence.*

Nous démontrerons qu'il existe — sous les mêmes conditions — une infinité de signes $>$ dans la suite des lettres ω ci-dessus. Il faut d'abord démontrer que le nombre des grandeurs ω appartenants à un même quadruple ne peut pas augmenter en passant d'un quadruple au suivant.

Etudions deux quadruples successifs

$$\begin{array}{lcl} \xi' & & \xi' \\ \xi'' & \text{et} & \xi'+\xi'' \\ \xi''' & & \xi''' \\ \xi'''' & & \xi''''\,. \end{array}$$

Le seul membre qui a changé est $\xi'+\xi''$. Supposons $\xi'>0$. Si $\xi''\geq 0$ on pouvait obtenir un ω qui avait changé mais pour cela il faut que

$$\begin{array}{rl} & \xi'+\xi''\geq|\xi'''| \\ \text{et} & \xi'+\xi''\geq|\xi''''|. \end{array}$$

Mais ceci constitue justement le cas critique que nous avons exclu en supposant que les groupes $\gamma\delta$, $\delta\gamma$ et $\delta\delta$ n'existent pas dans notre suite de lettres. Il n'est pas nécessaire d'étudier le cas $\xi'=0$ qui donne un quadruple inaltéré. Les cas $\xi'<0$ peut être traité de la même manière.

Nous démontrerons — sous les mêmes conditions — que le nombre des valeurs ω appartenant à un même quadruple décroît en passant d'un quadruple au suivant jusqu'à ce qu'il n'existe qu'un seul ω dans le quadruple. Supposons qu'un des quatre grandeurs ξ ont la valeur ω.

Tôt ou tard il prendra la deuxième place dans le quadruple. Supposons $\xi'' > 0$. Si $\xi' < 0$ le nombre des nombres ω dans un quadruple se diminue. Si $\xi' \geq 0$ et $\xi' + \xi'' \geq \omega$ il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\xi' + \xi'' \geq |\xi'''| \\ \text{et} \quad &\xi' + \xi'' \geq |\xi''''| \end{aligned}$$

mais ceci constitute le cas critique que nous avons exclu. Dans les cas non-critiques le nombre des nombres ω se diminue parce qu'on a

$$\begin{aligned} &\text{ou bien} \quad \xi' + \xi'' < |\xi'''| \leq \omega \\ &\text{ou bien} \quad \xi' + \xi'' < |\xi''''| \leq \omega. \end{aligned}$$

Le cas $\xi'' < 0$ peut être traité de la même manière. Quand il ne restera qu'un seul ω, celui-ci sera substitué, quand il a obtenu la deuxième place, par un ω plus petit.

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Si quatre nombres positifs a, b, c, d donnent une suite de lettres avec une infinité de δ en même temps que les groupes $\gamma\delta$, $\delta\gamma$ et $\delta\delta$ ne figurent qu'un nombre fini de fois il est impossible de trouver quatre nombres entiers P, Q, R, S qui satisfont à l'équation

$$Pa + Qb + Rc + Sd = 0 \ (\textit{sauf pour } P = Q = R = S = 0).$$

La démonstration est la même que celle de l'algorithme pour trois grandeurs.

Etudions quelques exemples.

Exemple 1.

Le quadruple

$$\begin{aligned} a &= \text{Cos } 1 + \cos 1 \\ b &= \text{Sin } 1 + \sin 1 \\ c &= \text{Cos } 1 - \cos 1 \\ d &= \text{Sin } 1 - \sin 1 \end{aligned}$$

donne la suite

$$\delta\alpha\delta\alpha\alpha\delta\alpha\alpha\alpha\alpha\delta\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\delta \ldots\ldots$$

Les nombres des lettres α qui se trouvent entre deux δ sont 1, 2, 4, 5, 6, 8, ... c'est-à-dire tous les nombres entiers sauf 3, 7, 11, ... $(4r - 1)$ ... Cos et Sin désignent des cosinus et sinus hyperboliques [8]. Dans cette suite de lettres il n'y-a pas des groupes critiques. Alors nous pouvons être sûr que les fractions Y/X, Z/X et U/X de notre algorithme convergent vers b/a, c/a et d/a.

Il sera impossible de trouver des entiers non-nuls P, Q, R, et S tels que

$$Pa + Qb + Rc + Sd = 0.$$

On en déduit que

$$A \text{ Cos } 1 + B \text{ Sin } 1 + C \cos 1 + D \sin 1 = 0$$

est impossible sauf pour $A = B = C = D = 0$.

Exemple 2.

Essayons de construire un quadruple a, b, c, d qui donne la suite périodique

$$\delta\gamma\beta\alpha \ \delta\gamma\beta\alpha \ \delta\gamma\beta\alpha \ldots.$$

L'algorithme qui corresponde à $\delta\gamma\beta\alpha$ transforme a, b, c, d en $2d - c$, $c - d$, $b - c$, $a - b$.

L'algorithme continue périodiquement si

$$\frac{2d - c}{a} = \frac{c - d}{b} = \frac{b - c}{c} = \frac{a - b}{d} = \lambda$$

d'où

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

ou bien

$$(\lambda + 1)(\lambda^3 - 4\lambda + 1) = 0.$$

On obtient

$$\begin{aligned} a &= 3\lambda + 2 \\ b &= -\lambda^2 - 2\lambda + 3 \\ c &= -\lambda^2 + 2 \\ d &= \lambda^2 + \lambda + 1. \end{aligned}$$

Les racines de l'équation ci-dessus sont -1, 0,254 ..., 1,861 ..., $-2{,}115$ .. En choisissant la racine

$$\lambda = 0{,}254101715 \ldots$$

on obtient

$$\begin{aligned} a &= 2{,}7623051 \ldots \\ b &= 2{,}4272289 \ldots \\ c &= 1{,}9354323 \ldots \\ d &= 1{,}3186694 \ldots \end{aligned}$$

Ces nombres ne sont pas linéairement indépendants. En effet nous avons la relation

$$a + b - 2c - d = 0.$$

Il peut être intéressant de regarder le commencement de l'algorithme. Je me borne à écrire deux décimaux.

	ξ	η	ζ
2,76	—2,43	—1,94	—1,32
2,43	2,76	0,00	0,00
1,94	0,00	2,76	0,00
1,32	0,00	0,00	2,76
0,33	—2,43	—1,94	—1,32
2,43	0,33	—1,94	—1,32
1,94	0,00	2,76	0,00
1,32	0,00	0,00	2,76
δ			
2,43	0,33	—1,94	—1,32
1,94	0,00	2,76	0,00
1,32	0,00	0,00	2,76
0,33	—2,43	—1,94	—1,32
0,49	0,33	—1,94	—1,32
1,94	0,33	0,82	—1,32
1,32	0,00	0,00	2,76
0,33	—2,43	—1,94	—1,32

Regardons en particulier les valeurs ω appartenantes aux grandeurs ζ. On trouve les nombres

2,76, 2,76, 2,76, 2,76, 2,76, 1,44, 1,44, 1,44, 1,57, 1,57, 1,57, 1,57, 1,89, 1,89, 1,89, 1,89, 1,93, 1,93, 2,00, 2,00, 2,00, 2,00, 2,01 . . . .

Ces nombres ne forment pas une suite monotone.

Exemple 3.

L'exemple suivant qui est dû à M. Ernst Selmer possède une période plus courte. Les nombres suivants donnent la suite périodique $\beta\delta\gamma\ \beta\delta\gamma\ \beta\delta\gamma \ldots$:

$$\begin{aligned} a &= 2 - \lambda^2 = 1{,}8794\ldots \\ b &= 1 \qquad\ \ = 1{,}0000\ldots \\ c &= 1 - \lambda \ \ = 0{,}6527\ldots \\ d &= \lambda \qquad\ \ = 0{,}3473\ldots \end{aligned}$$

où

$$\lambda = 0{,}3473\ldots$$

est une des racines de l'équation

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

qui peut être écrite sous la forme

$$(\lambda + 1)(\lambda^3 - 3\lambda + 1) = 0.$$

Les nombres donnés ne sont pas linéairement indépendants. En effet nous avons

$$0 \cdot a - 1 \cdot b + 1 \cdot c + 1 \cdot d = 0.$$

On voit que l'algorithme pour quatre quantités n'a pas les mêmes bonnes propriétés que celui de trois quantités. Mais il est bien possible qu'on peut arriver à un algorithme possédant ces propriétés par une voie plus compliquée. A partier d'un triple (a, b, c) on peut former soit le triple $(a - b, b, c)$ soit $(a - c, b, c)$. En combinant ces deux possibilités N. Pipping [5] a obtenu une fraction continue ramifiée. Dans un travail récent il a essayé d'améliorer ce procédé en choisissant une des deux possibilités d'après une certaine règle [10]. Il se peut qu'on pourrait faire quelque chose semblable dans le cas de quatre nombres. Mais de l'autre coté il est aussi possible que notre procédé — avec les groupes critiques — peut se montrer avantageux dans certaines applications — par exemple pour l'étude de l'irréductibilité des polynomes.

Remarque. Mr. Marcel David a donné [11] une généralisation des fractions continues analogue à la mienne par des considérations géométriques différentes de celles que j'avais employé.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. *Eléments d'Euclide* X, 2 et VII, 1.
2. Jacobi, C. G. J., *Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird*, J. reine angew. Math. 69, 29—64; Werke VI, 385—426.
3. Brun, Viggo, *En generalisation av kjedebrøken I—II*, Norske Vid. Selsk. Skr. 1919—20. (Avec des résumés en français.)
4. Poincaré, H., *Sur une généralisation des fractions continues*, C. R. Acad. Sci. Paris 99 (1884).
5. Pipping, Nils, *Ein Kriterium für die reellen algebraischen Zahlen auf eine direkte Verallgemeinerung des Euklidischen Algorithmus gegründet*, Acta Acad. Åbo 1921.
5. Pipping, Nils, *Un criterium pour les nombres algébriques réels, fondé sur une généralisation directe de l'algorithme d'Euclide*, C. R. Acad. Sci. Paris 170 (1920), 1155.

6. Törnqvist, Leo, *Kriterien für die reellen algebraischen Zahlen, arithmetische Ketten und diophantische Approximationen*, Acta Acad. Åbo 1936.
7. Barbour, J. J., *Music and ternary continued fractions*, Amer. Math. Monthly 45 (1948), 545.
8. Brun, Viggo, *Mehrdimensionale Algorithmen, welche die Eulersche Kettenbruchentwicklung der Zahl e verallgemeinern*, Euler-Festschrift, Berlin 1958.
9. Brun, Viggo, *Music and ternary continued fractions*, Det kgl. norske vidensk. selskab. Forh. 23 (1950).
10. Pipping, Nils, *Approximation zweier reellen Zahlen durch rationale Zahlen mit gemeinsamen Nenner*, Acta Acad. Åbo 1957.
11. David, Marcel, *Contribution a l'étude algorithmique des approximations rationnelles simultanées de deux irrationnels, application au cas cubique*. Publ. Sci. Univ. Alger. Sér. A. Tome III, No. 1 (1956).

ON A SIMPLE RELATIONSHIP BETWEEN SOME OF THE CLASSICAL INTERPOLATION FORMULAE

TH. BUSK

In the following it will be shown how Stirling's and Bessel's interpolation formulae can be derived from each other by the simple operation δ. A similar relationship is demonstrated for Everett's and Steffensen's interpolation formulae.

We write Stirling's and Bessel's interpolation formulae in the following way:

Stirling's formula:

$$(1)\qquad f(x) = f(0) + \sum_{\nu=0}^{k-1}\left[\frac{x^{[2\nu+2]-1}}{(2\nu+1)!}\,\square\,\delta^{2\nu+1}f(0) + \frac{x^{[2\nu+2]}}{(2\nu+2)!}\,\delta^{2\nu+2}f(0)\right] + \\ + x^{[2k+2]-1}\,f[x, 0, \pm 1, \ldots, \pm k]$$

Bessel's formula:

$$(2)\qquad f(x+\tfrac{1}{2}) = \sum_{\nu=0}^{k-1}\left[\frac{x^{[2\nu+1]-1}}{(2\nu)!}\,\square\,\delta^{2\nu}f(\tfrac{1}{2}) + \frac{x^{[2\nu+1]}}{(2\nu+1)!}\,\delta^{2\nu+1}f(\tfrac{1}{2})\right] + \\ + x^{[2k+1]-1}\,f[x+\tfrac{1}{2}, 0, \pm 1, \ldots, \pm (k-1), k].$$

Here, with a few changes, Steffensen's notation[1] has been used for

the central factorial: $x^{[n]} = x\left(x+\dfrac{n}{2}-1\right)^{(n-1)} =$

$$= x\left(x+\frac{n}{2}-1\right)\left(x+\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(x-\frac{n}{2}+1\right),$$

the reduced central factorial: $x^{[n]-1} = \dfrac{x^{[n]}}{x} = \left(x+\dfrac{n}{2}-1\right)^{(n-1)}$,

the central difference δ: $\quad \delta f(x) = f(x+\tfrac{1}{2}) - f(x-\tfrac{1}{2})$,

the mean $\square$: $\quad \square\, f(x) = \tfrac{1}{2}\,[f(x+\tfrac{1}{2}) + f(x-\tfrac{1}{2})]$,

the divided difference: $f[x, 0, \pm 1, \ldots, \pm k]$ with arguments $(x, 0, \pm 1, \ldots, \pm k)$.

[1] Cf. J. F. Steffensen: *Interpolationslære*, København 1925, or the later English or American editions of *Interpolation.*